संदर्भग्रंथ सूची

१) ओक, अ.वा. आणि सत्यवती राऊळ, (१९९१). गणित: स्वरुप, अध्ययन, अध्यापन. पुणे: नूतन प्रकाशन.

२) ओक, सुमन (१९८४) शैक्षणिक तंत्रविज्ञान.

३) कदम, चा. प. (१९८९). शैक्षणिक संख्याशास्त्र पुणे: नूतन प्रकाशन.

४) कुंडले, म. बा. (१९७८). अध्यापन : शास्त्र आणि पद्धती.(चौथी आवृत्ती) पुणे: व्हिनस प्रकाशन.

५) कुंडले म.बा. (१९९६) शैक्षणिक तत्त्वज्ञान व शैक्षणिक समाजशास्त्र पुणे : श्री विद्याधाम प्रकाशन.

६) कुलकर्णी, के. वि. (१९६६). शैक्षणिक मानसशास्त्र (सातवी आवृत्ती) पुणे : अनमोल प्रकाशन.

७) जगताप, ह.ना. (१९९५). शैक्षणिक मानसशास्त्र. पुणे : अनमोल प्रकाशन.

८) जगताप ह. ना. (संपादक). (२००४) गणित आशययुक्त अध्यापन. पुणे : नूतन प्रकाशन.

९) जगताप, ह.ना. (२००४). प्रगत शैक्षणिक तंत्रविज्ञान आणि माहिती तंत्रविज्ञान. पुणे : नूतन प्रकाशन.

१०) जोशी, अनंत आणि संजीवनी महाले. (१९९९) संशोधन अहवाल लेखन पद्धती. नाशिक: य.च.म.मु.वि.

११) दांडेकर, वा. ना. (१९८५) शैक्षणिक मूल्यमापन व संख्याशास्त्र. (दुसरी आवृत्ती) पुणे: श्रीविद्या प्रकाशन.

१२) दुनाखे, अरविंद (१९९४) शैक्षणिक व व्यावसायिक मार्गदर्शन आणि समुपदेशन. (संधारित द्वितीय आवृत्ती). पुणे: नूतन प्रकाशन.

१३) पण्डित, बन्सी बिहारी. (१९८९) शिक्षणातील संशोधन अभिकल्प पुणे : नूतन प्रकाशन.

१४) पण्डिंत, बन्सी बिहारी (१९९७) शिक्षणातील संशोधन
पुणे: नित्य नूतन प्रकाशन.

१५) पाटील, लीला (१९८३)आजचे अध्यापन. (द्वितीय आवृत्ती).
पुणे : श्रीविद्या प्रकाशन.

१६) फडके, वासंती (१९८८) सुलभ शैक्षणिक संख्याशास्त्र.
पुणे : नूतन प्रकाशन.

१७) भांडारकर, के. म. (१९९८) सुलभ शैक्षणिक संख्याशास्त्र
पुणे : नूतन प्रकाशन.

१८) भिंताडे, वि. रा. (१९८९) शैक्षणिक संशोधन पद्धती.
पुणे : नूतन प्रकाशन.

२०) मखीजा संयोगलता, आणि द.बा.पोक्षे, (२००१) गणिताचे अध्यापन.
पुणे :नूतन प्रकाशन.

२१) मुळे, रा. श. आणि उमाळे वि.तु. (१९८७). शैक्षणिक संशोधनाची मूलतत्वे. (तिसरी आवृत्ती), नागपूर : महाराष्ट्रात विद्यापीठ ग्रंथ निर्मिती मंडळ.

२२) राव, उषा. (१९८९) शैक्षणिक तंत्रविज्ञान. नागपूर : महाराष्ट्रात विद्यापिठ ग्रंथ निर्मिती मंडळ.

२३) सप्रे, निलिमा, आणि प्रिती पाटील २००२). अध्यापनाची प्रतिमाने. कोल्हापूर : फडके प्रकाशन.

२४) Aggarwal, J.C. (1995) Essentilas of educational technology : Teaching Learning.
New Delhi : Vikas Publishing House.

२५) Best, J.W. and J. V. Kahn, (1995) Research in Education. (7th ed.) New Delhi : Prentice Hall.

२७) Bruce, Joyce. Ú Marsha, Well. (1985) Models of Teaching. New Delhi : Prentice Hall.

२८) Buch, M. B. (Editor) . (1974). A Survey of Research in Education. barda : M. S. University of Baroda.

२९) Buch, M. B. (Editor). (1972- 78) Second Suevey of Research in Education. Baroda. M.S. University of Baroda.

३०) Buch, M. B.(Editor) (1978- 83) Third Survey of Research in Education. New Delhi : NCERT

३१) Buch, M.B. (Editor) (1983-88) Fourth Survey of Research in Education. New Delhi : NCERT.

३२) Buch, M.B. (Editor) (1988-92) Fourth Survey of Research in Education. New Delhi : NCERT.

३३) Kumar, K. L. (1996). Education Technology. New Delhi: New age International Publication.

३४) Mangal, S.K. (1997) Foundations of Educational Technology. Ludhiana :Tandan Publication.

३५) Mustafa, M. (2004) Teaching of Mathematics New Delhi : Deep and Deep Publication.

३६) Sidhu, K. S. (1984) Methodology of Research in Education. New Delhi : Sterling Publishers.

परिशिष्टे

१)	प्रायोगिक कार्यातील प्रायोगिक गटामध्ये सहभागी झालेल्या विद्यार्थ्यांची यादी.
२)	प्रायोगिक कार्यातील नियंत्रित गटामध्ये सहभागी झालेल्या विद्यार्थ्यांची यादी.
३)	पूर्वचाचाणी - नियोजन आराखडा.
४)	पूर्वचाचाणी प्रश्नपत्रिका.
५)	पूर्वचाचणीमध्ये विद्यार्थ्यांना प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकाची यादी
६)	उत्तर चाचणी - नियोजन आराखडा
७)	उत्तर चाचणी प्रश्नपत्रिका
८)	उत्तर चाचणीमध्ये विद्यार्थ्यांना प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकांची यादी.
९)	उत्तर चाचणीमध्ये प्रायोगिक गटातील विद्यार्थ्यांना उद्दिष्ट निहाय प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकाची यादी.
१०)	उत्तर चाचणीमध्ये नियंत्रित गटातील विद्यार्थ्यांना उद्दिष्टनिहाय प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकाची यादी.
११)	स्वयः अध्ययन संच
१२)	संबंधित तज्ज्ञांचे प्रमाणपत्र

परिशिष्ट -१

प्रायोगिक गटातील गट क्र. १ मध्ये सहभागी विद्यार्थीनीची यादी.

प्रायोगिक गट

अ. नं.	विध्यार्थिनीचे नांव
१.	कु. दिप्ती दिलीप तांदळे
२.	कु. स्नेहल यशवंत चव्हाण
३.	कु. अबोली सर्जेराव भोपळे
४.	कु. उषा युवराज पाटील
५.	कु. धनश्री महेंद्र पाटील
६.	कु. शामल श्रीरंग पाटील
७.	कु. कोमल कृष्णात पाटील
८.	कु. प्रियांका विजय यादव
९.	कु. अश्विनी अशोक शिंदे
१०.	कु. शगुप्ता अस्लम मांगलेकर
११.	कु. अश्विनी धोंडीराम शेणेकर
१२.	कु. प्रियांका विजय वेदपाठक
१३.	कु. काजल संभाजी पाटील
१४.	कु. अश्विनी अशोक कदम
१५.	कु. स्वाती माधवराव बाबर
१६.	कु. अबोली गजानन उरणे
१७.	कु. शीतल शरद मासाळ
१८.	कु. पल्लवी रामचंद्र भोपळे
१९.	कु. तेजस्वीनी कुणाल गाडे
२०.	कु. पुजा अजय लोखंडे
२१.	कु. दिनाज मकबुल मुल्ला
२२.	कु. सुजाता माणिक करडे
२३.	कु. अश्विनी आप्पासाो केंगार
२४.	कु. अर्चना दिलीप साळुंखे
२५.	कु. रेश्मा वसंत पाटसुपे

परिशिष्ट - २

प्रायोगिक कार्यातील गट क्र. २ मध्ये सहभागी विद्यार्थीनींची यादी.

नियंत्रित गट

अ. नं.	विध्यार्थिनीचे नांव
१.	कु. शेजल संजय कांबळे
२.	कु. काजल राजाराम माने
३.	कु. अनुराधा बाजीराव कुकडे
४.	कु. निलम काशीनाथ नलवडे
५.	कु. विद्या मारुती पाटील
६.	कु. सुप्रिया राजाराम पाटील
७.	कु. ऐश्वर्या राजेंद्र कांबळे
८.	कु. निवेदिता हैबती पाटील
९.	कु. पुजा राजाराम पाटील
१०.	कु. सोनल संभाजी चव्हाण
११.	कु. अश्विनी आप्पासो शिंदे
१२.	कु. अर्चना पांडुरंग पाटील
१३.	कु. शितल संभाजी पवार
१४.	कु. अश्विनी मुकुंद सावंत
१५.	कु. अनुराधा सादिक पाटील
१६.	कु. निलम शरद पाटील
१७.	कु. प्रतिक्षा संभाजी पाटील
१८.	कु. प्रियांका अशोक पाटील
१९.	कु. पुजा महिपती चव्हाण
२०.	कु. आदिती शंकर माळी
२१.	कु. सोनाली धोंडीराम शेणेकर
२२.	कु. आयेशा नजीर शेख
२३.	कु. शीतल अशोक चव्हाण
२४.	कु. प्रियांका विजय यादव
२५.	कु. शीतल विलास पवार

परिशिष्ट - ३

चाचणीचा संविधान तक्ता

अं. क.	उपघटक	उद्दिष्टे									एकूण
		ज्ञान			आकलन			उपयोजन			
		नि	ल	व	नि	ल	व	नि	ल	व	
१	वर्ग आणि वर्गमुळ			(२)१			(३)१		—		५
२	घातांक			(१)१			(१)१		(१)३		५
३	चौकोन			(१)१			(१)१		(१)२		४
४	परिमेय संख्येची बेरीज व वजाबाकी			(३)१			(१)१		(२)२		८
५	एकसामाईक समीकरण			—			(१)१		(१)२		३
				(७)१			(७)१		(४)१(१)४		२५

कंसातील अंक प्रश्नसंख्या दर्शवितात व कंसाबाहेरील अंक गुण दर्शवितात

२) उद्दिष्टानुसार गुणविभागणी —

अं.क्रं	उद्दिष्टे	गुण	शे. गुण
१	ज्ञान	७	२८
२	आकलन	७	२८
३	उपयोजन	११	४४
	एकूण	२५	१००

३) काठिण्य पातळीनुसार गुणविभागणी :—

अं.क्रं	प्रश्नपातळी	गुण	शे. गुण
१	सोपे	१४	५६
२	मध्यम	८	३२
३	कठीण	३	१२
	एकूण	२५	१००

परिशिष्ट — ४
पूर्व चाचणी

वेळ : 1 तास | गुण : 25

प्रश्न 1 ला रिकाम्या जागा भरुन विधाने पुन्हा लिहा 7 गुण

1) ऋण संख्येचा वर्ग — संख्या असते
2) 8 / 2 = ------
3) $3^5 X 3^4 = 3^{--------}$
4) -6 +7 = -----
5) चौकोनाला एकूण ----- बाजू असतात.
6) 4^2 = -----
7) (-3) X (2) = -----

प्रश्न 2 रा एका वाक्यात उत्तरे लिहा 7 गुण

1) वर्ग म्हणजे काय?
2) वर्गमूळ कोणत्या चिन्हाने दाखवितात?
3) चौकोनांच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज किती अंश असते?
4) चल म्हणजे काय?
5) विरुद्ध संख्या म्हणजे काय?
6) 64 चे वर्गमूळ किती?
7) a^0 याची किंम्मत किती?

प्रश्न 3रा खालील उपप्रश्न सोडवा 8 गुण

1) सोपे रुप दया 40/32
2) सोडवा
   5/6 + 7/6
3) सोडवा
   3x - 5 = 4
4) चौ. ABCD मध्ये कर्ण कोणते?

प्रश्न 4 था सोडवा 3 गुण

$(a^{2/3} X a^{5/2})^{6/19}$

पूर्व चाचणी

गुणदान योजना

प्र.क.	उत्तर	गुण
प्र.क.1 1)	धन	1
2)	4	1
3)	9	1
4)	1	1
5)	1	1
6)	16	1
7)	6	1

प्र.क.2 1)	त्याच संख्येने त्याच संख्येला गुणणे	1
2)	' $\sqrt{\ }$ '	1
3)	360	1
4)	इंग्रजी अक्षराला यल म्हणतात	1
5)	ज्यांची बेरीज शुन्य असते	1
6)	8	
7)	1	

प्र.क.3 1)	$\frac{5}{4}$ $= \frac{5}{4}$	1
2)	$\frac{5+7}{6}$ $= \frac{12}{6}$ $= 2$	1
3)	$3x = 4 + 5$ $x = 3$	1
4)	i) AC ii) BD	1

प्र.क.4 1)	$(a^{2/3 + 5/2})$ 6/19	1
	$(a^{4 + 15/6})$ 6/19	1
	$a^{14/6 \times 6/19}$	1
	$= a$	1

परिशिष्ठ — ५

पुर्व चाचणीमध्ये प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकांची यादी

२५ पैकी गुण

गट क्रमांक १ —

विद्यार्थी अं.क्रं.	प्राप्तांक		विद्यार्थी अं.क्रं.	प्राप्तांक
१	२३		१४	२२
२	२५		१५	२४
३	२२		१६	२३
४	२१		१७	२३
५	२३		१८	२३
६	२३		१९	२२
७	२३		२०	२५
८	२१		२१	२४
९	२४		२२	२२
१०	२५		२३	२३
११	२३		२४	२४
१२	२४		२५	२३
१३	२३			

गट क्रमांक २ —

विद्यार्थी अं.क्रं.	प्राप्तांक	विद्यार्थी अं.क्रं.	प्राप्तांक	विद्यार्थी अं.क्रं.	प्राप्तांक
१	२५	१०	२५	१९	२४
२	२२	११	२२	२०	२१
३	२०	१२	२०	२१	२१
४	२२	१३	२३	२२	२२
५	२५	१४	२१	२३	२५
६	२५	१५	२२	२४	२३
७	२५	१६	२१	२५	२२
८	२४	१७	२२		
९	२२	१८	२५		

परिशिष्ट - ६.

उत्तर चाचणी नियोजन आराखडा.

1) उपघटकानुसार गुणविभागणी –

अ. न.	उपघटक	गुण	शे.गुण
1	वर्ग आणि वर्गमूळ	5	10
2	घातांक	4	08
3	सममिती	3	06
4	त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ	4	08
5	नित्य समविस्तार	4	08
6	एकचल समिकरण	5	10
7	अपरिमेय संख्या, वास्तव संख्या	5	10
8	समरुपता	3	06
9	चौकोन रचना	4	08
10	वर्तुळ व स्पर्शिका	4	08
11	नित्य समीकरण	4	08
12	एकसामायिक समीकरण	5	10
	एकूण	50	100

3) प्रश्नप्रकारा नुसार गुणविभागणी

अ. नं.	प्रश्नप्रकार	गुण	शे. गुण
1	वस्तुनिष्ट	38	74
2	लघुत्तरी	12	26
3	निबंधवजा	=	=
	एकूण	50	100

उद्दिष्टानुसार गुणविभागणी

अ.नं.	उद्दिष्टे	गुण	शे.गुण
1	ज्ञान	12	24
2	आकलन	26	52
3	उपयोजन	12	24
	एकूण	50	100

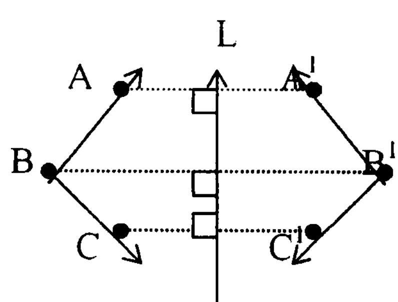
संविधान तक्ता

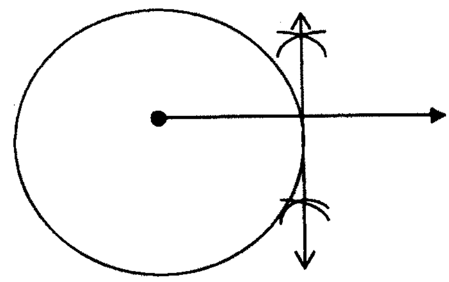
	संविधान तक्ता	उद्दिष्टे									एकूण
		ज्ञान			आकलन			उपयोजना			
		नि	ल	व	नि	ल	व	नि	ल	व	
1	वर्ग आणि वर्गमूळ			(1)1				(1)3			4
2	घातांक			(1)1		(1)2					3
3	सममिती			(1)1		(1)3					4
4	त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ			(1)1		(2)2		(1)3			5
5	नित्य समीकरण – विस्तार			(1)1							4
6	एकचल समीकरण			(1)1		(1)3		(1)3			4
7	अपरिमेय व वास्तव संख्या			(1)1							4
8	समरुपता			(1)1		(1)2		(1)3			4
9	चौ. रचना			(1)1		(1)3					4
10	वर्तुळ – स्पर्शिका			(1)1		(1)2					4
11	नित्य समीकरण			(1)1		(2)2					5
12	एकसामायिक समीकरणे			(1)1		(2)2					5
				12(1)		(4)3 (7)2		(4)3			50

कंसातील अंक प्रश्नसंख्या दर्शवितात

कंसा बाहेरील अंक गुण दर्शवितात.

उत्तरसूची व गुणदान योजना

प्रश्न क्र.	उत्तर	गुण
प्रश्न 1 1)	परिमेय	1
2	6	1
3	$a^2 - 2ab + b^2$	1
4	10	1
5	दुप्पट	1
6	उंची	1
प्रश्न 2 1)	4 अक्ष	1
2	$= \frac{a+b+c}{2}$	1
3	$x + 5 = 7$	1
4	6 प्रकारे लावता येते	1
5	$(\text{बाजू})^2$	1
6	दोन समीकरणांचे एकमेव उकलीने एकाच समयी समाधान होते.	
प्रश्न 3)	a) 5 76 b) 4.41	1.1
2	$\frac{4+1}{3}$ 7 $\frac{5}{3}$ = 7	1 1 1
3		1 1

4	$= x^2 + 2.x.3y + (3y)^2$ $= x^2 + 6xy + 9y^2$	1. 1
5		1 1
6	बेरीज $= 9+1 = 10$ गुणाकार $= 9 + 1 = 9$	1 1
7	$s = \frac{a+b+c}{2}$ $s = \frac{12+7+9}{2} = \frac{28}{2}$ $= \frac{28}{2} = 14$	1 1
8	क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ x पाया x उंची $= \frac{1}{2} \times 8 \times 7$ $= 28$ चौसेमी	1 1
प्र 4 1)	$= x\ \frac{8+2}{2x8}$ $= x\ \frac{10}{16}$ $= x\ \frac{5}{8}$	1 1 1
2)	$s = 21$ cm. क्षेंत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21+5)}$ $=$ 34 चौ. सेमी.	1 1 1

3)	L (LM)=3 सेमी , L(MN)=4 सेमी L(LM) – 3 सेमी त्रिकोण काढणे	1 2
4)	पहिली संख्या = X-7 दुसरी संख्या = X म्हणून $\frac{X-7}{X} - \frac{4}{5}$ त्या संख्या 28 व 35	1 1 1
5)	वजाबाकी करा 3x = 9 x = 3 y = -2	 1 1 1
प्र. 5 1)	$(\text{कर्ण})^2 = (\text{बाजू})^2 + (\text{बाजू})^2$ $=(5)^2 + (7)^2$ $(\text{कर्ण})^2 = 4$ कर्ण = 8.602	 1 1 1
2)	चौकोनाची कच्ची आकृती योग्य चौकोन काढणे	1 3
3)	$\frac{3p(p-4)}{q(p-q)} \times \frac{q2(p+q)}{6(p+q)(p-q)}$ $\frac{3p}{q} \times \frac{q2}{6(p-q)}$ $\frac{pq}{2(p-q)}$	1 1 1
4)	98 01 99 9 | 58 - 01 + 9 | 81 189 | 1701 9 | - 1701 198 | 0000	1 1 1 1

परिशिष्ट - ७

उत्तर चाचणी

वेळ 1 तास गुण 50

प्रश्न 1.रिकाम्या जागा भरा 6

1. परिमेय संख्येचा वर्ग ——— संख्या असते.
2. $4^8 / 4^2 = 4^{---}$
3. $(a - b)^2 =$ ------
4. चौकोनाला एकूण ———घटक असतात.
5. व्यास त्रिज्येच्या ——— पट असतो.
6. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 1/2 X पाया X ———

प्रश्न 2. एका वाक्यात उत्तरे लिहा. 6

1. चौरसाला सममितीने किती अक्ष असतात?
2. अर्धपरिमितीचे सुत्र लिहा.
3. एका संख्येत 5 मिळवले तर 7 येते, समीकरण तयार करा.
4. दोन त्रिकोणची एकास एक संगती किती प्रकारे लावता येते?
5. चौरसाचे क्षेत्रफळ सुत्र कोणते?
6. एक सामायिक समीकरण म्हणजे काय?

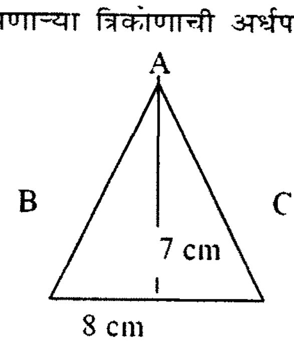
प्रश्न 3. खालील पैकी कोणतेही सात प्रश्न सोडवा 14

1. भागाकार पद्धतीने वर्गमूळ काढण्यासाठी गट पाडा अ) 576 ब) 4.41
2. सरळ रूप दया. $7^{4/3} \times 7^{1/3}$
3. रेषा L च्या संस्थति L ABC च्या परावर्तन कोन काढा.
4. O केंद्र व 2.5 सेमी त्रिज्येच्या वर्तुळ काढा व वर्तुळावर T बिंदू घेवून बिंदू T मधून वर्तुळास स्पर्शिका काढा.

6. अशा दोन संख्या शोधा की गुणाकार 9 व बेरीज 10 येईल

7. 12 सेमी, 7 सेमी व 9 सेमी बाजू असणाऱ्या त्रिकोणाची अर्धपरिमिती काढा

8. बाजूच्या आकृतीत दिलेल्या माहितीच्या आधारे क्षेत्रफळ काढा.



प्रश्न 4 खालीलपैकी कोणतेही चार प्रश्न सोडवा 12

1. सरळरूप दया. $x^{1/2} \text{ X } x^{1/3}$

2. ΔPQR मध्ये (PQ) = 13cm. (QR) = 15cm. (PR) = 14cm तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

3. ΔPQR मध्ये PQ = 4.5cm. QR = 6cm. PR = 4.5cm. ΔPQR व ΔLMN यांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर 3:2 आहे तर ΔLMN काढा.

4. पहिली संख्या दुसऱ्या संख्येपेक्षा 7 ने लहान आहे. पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असणारे गुणोत्तर 4:5 आहे. तर त्या संख्या काढा.

5. सोडवा $10x - 2y = 34$, $7x - 2y = 25$

प्रश्न 5 कोणतेही तीन प्रश्न सोडवा 12

1. एका काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू 5 सेमी व 7 सेमी आहेत कर्णाची किंमत काढा. ($\sqrt{74} = 8.602$)

2. पुढील मापावरून चौकोन PQRS काढा.

PQ = QR = RS = 5cm. $m\angle Q = 120^0$. $m\angle R = 60^0$

3. सोपे रूप दया. $3p(p-q) / pq - q^2$ **X** $q^2 (p+q) / 6 (p^2 - q^2)$

4. भागाकार पद्धतीने वर्गमुळ काढा. 9801

परिशिष्ट - ८

उत्तर चाचणीमध्ये प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकाची यादी

गट क्र. १ — प्रायोगिक गट

५० पैकी गुण

विद्यार्थीनी अ.क्र.	प्राप्तांक	विद्यार्थीनी अ.क्र.	प्राप्तांक	विद्यार्थीनी अ.क्र.	प्राप्तांक
१	३७	१०	३५	१९	३७
२	४१	११	४७	२०	४४
३	४४	१२	४९	२१	३७
४	३१	१३	४३	२२	४६
५	४८	१४	३७	२३	४०
६	४४	१५	४३	२४	४१
७	४५	१६	३७	२५	४९
८	४२	१७	४७		
९	४१	१८	३२		

गट क्र. २ नियंत्रित गट —

५० पैकी गुण

विद्यार्थीनी अ.क्र.	प्राप्तांक	विद्यार्थीनी अ.क्र.	प्राप्तांक	विद्यार्थीनी अ.क्र.	प्राप्तांक
१	२३	१०	२८	१९	३१
२	२०	११	२६	२०	३६
३	२५	१२	२८	२१	३८
४	२३	१३	२९	२२	३०
५	२३	१४	३०	२३	३७
६	२७	१५	३०	२४	४०
७	३२	१६	३७	२५	३४
८	३०	१७	३४		
९	३१	१८	४९		

परिशिष्ट - ९

उत्तर चाचणीमध्ये प्रायोगिक गटातील विद्यार्थ्यांना उद्दीष्ठ निहाय प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकाची यादी

विद्यार्थिनींचा अ.क्र.	उद्दिष्ट			एकूण
	ज्ञान	आकलन	उपयोजन	
१	१०	१९	०८	३७
२	१२	२१	०८	४१
३	१०	२४	०४	३८
४	११	१८	०८	३७
५	१०	२६	१२	४८
६	१०	२२	१२	४४
७	१२	२१	१२	४५
८	१२	२२	०८	४२
९	१०	२४	०७	४१
१०	१०	१७	०८	३५
११	१२	२४	११	४७
१२	११	२६	१२	४९
१३	१२	२४	०७	४३
१४	१२	१८	०७	३७
१५	१२	१९	१२	४३
१६	१२	२१	०४	३७
१७	११	२६	१०	४७
१८	१२	१४	०६	३२
१९	१०	१९	०८	३७
२०	१२	२४	०८	४४
२१	०८	२१	०८	३७
२२	१२	२३	११	४६
२३	१२	२४	०४	४०
२४	१२	२१	०८	४१
२५	११	२६	१२	४९

परिशिष्ट - १०

उत्तर चाचणीमध्ये नियंत्रित गटातील विद्यार्थ्यांना उद्दीष्ट निहाय प्राप्त झालेल्या प्राप्तांकाची यादी

विद्यार्थिनींचा अ.क्र.	उद्दिष्ट			एकूण
	ज्ञान	आकलन	उपयोजन	
१	०५	१५	—	२३
२	१०	१०	—	२०
३	०८	१५	०२	२५
४	०९	१४	—	२३
५	१०	१३	—	२३
६	११	१६	—	२७
७	१०	१४	०८	३२
८	१०	१३	०७	३०
९	११	१९	०१	३१
१०	१०	१८	००	२८
११	१०	१६	००	२६
१२	०९	१४	०५	२८
१३	११	१४	०४	२९
१४	१२	१८	०५	३०
१५	११	१३	०६	३०
१६	११	२०	०६	३७
१७	१०	१२	१२	३४
१८	११	२६	१२	४९
१९	१०	१२	०९	३१
२०	११	१८	०७	३६
२१	१०	२२	०६	३८
२२	०९	१३	०६	३०
२३	१०	१९	०८	३७
२४	१२	२१	०७	४०
२५	११	१९	०४	३४

परिशिष्ट - 11
स्वयं अध्ययन संच
प्र. 1 ले
वर्ग आणि वर्गमूळ

वर्ग :- त्याच संख्येने त्याच संख्येला गुणणे म्हणजे त्या संख्येचा वर्ग होय.

1. वर्ग म्हणजे त्या संख्येचा घातांक 2 असतो.
2. 3 चा वर्ग चिन्हात 3^2 असे लिहीतात.

वर्गमुळ :- एखादया परिमेय संख्येस त्याच संख्येने गुणले असता जी संख्या मिळते त्या संख्येस वर्ग संख्या म्हणतात आणि परिमेय संख्येस वर्गमूळ म्हणतात.

टिप :- वर्गमूळ नेहमी ' $\sqrt{\ }$ ' या चिन्हाने दाखविले जाते.

उदा. 1) 6 चा वर्ग करा.

रीत	स्पष्टीकरण
6^2	1) 6 चा घातांक 2 लिहिला.
$= 6 \times 6$	2) 6 चा दोन वेळा गुणाकार केला.
$= 36$	3) गुणाकार 36 आला तो म्हणजे वर्ग होय.
उत्तर - $6^2 = 36$	

उदा. 2) खालील संख्यांचे अवयव पध्दतीने वर्गमूळ काढा.

रीत	स्पष्टीकरण
36	1) वर्गमुळाच्या चिन्हात 36 ही संख्या लिहिली
36	2) कोणत्या दोन समान संख्यांचा गुणाकार 36 आहे हे शोधले
$\sqrt{6 \times 6}$	3) ती संख्या 6 X 6 या स्वरुपात लिहीली.
$= 6$	4) 6 X 6 चा एक गट करुन वर्गमुळासाठी एक संख्या लिहीली. ते म्हणजे वर्गमूळ होय.
उत्तर - $\sqrt{36} = 6$	

उदा. 3) 10 चा वर्ग करा.

रीत	स्पष्टीकरण
10^2	1) 1C चा घातांक 2 लिहिला.
= 10 X 10	2) 10 चा दोन वेळा गुणाकार केला.
= 100	3) गुणाकार 100 आला तो म्हणजे वर्ग होय.
उदा. 2. 1600	स्पष्टीकरण
= $\sqrt{1600}$ 1.	दिलेली संख्या वर्गमूळाच्या चिन्हात लिहली.
= $\sqrt{40 \times 40}$	2 कोणत्या दोन समान संख्याचा गुणाकार 1600 आहे शोधले.
= 40 3. 40 x40	यांचा एक गट करून त्यातून 40 ही संख्या लिहली.
उत्तर . $\sqrt{1600}$ = 40	40 ही संख्या म्हणजे 1600 चे वर्गमूळ होय.

स्वाध्याय -

प्रश्न 1. खालील संख्यांचे वर्ग करा.

1) 9, 2) 12, 3) 17, 4) 8.

प्रश्न 2. खालील संख्यांचे अवयव पध्दतीने वर्गमूळ काढा.

1) भागाकार पध्दतीने वर्गमूळ काढणे.

2) संख्येचे गट करणे

ज्या संख्यांचे वर्गमूळ काढावयाचे आहे त्या संख्यांचे आगोदर गट पाडणे आवश्यक असते. गट खालील पध्दतीने पाडले जातात.

उदा. 998.56 चे गट पाडा.

रीत	स्पष्टीकरण
998.56	1) प्रथम दिलेली संख्या लिहिली.
= 9 98.56	2) दशांश स्थळाच्या अगोदरच्या संख्येचे उजवीकडून डावीकडे दोन-दोन अंकांचे गट केले. एक अंक शिल्लक असेल तर त्याचा स्वतंत्र गट केला.
= 998.56	3) दशांस स्थळानंतर च्या संख्यांचे डावीकडून उजवीकडे दोन-दोन अंकांचे गट केले.
उत्तर 998.56	

भागाकार पध्दतीने वर्गमूळ काढणे -

उदा. 1.21 चे भागाकार पध्दतीने वर्गमूळ काढणे.

रीत	स्पष्टीकरण
1. 21	1) प्रथम वरील उदाहरणाप्रमाणे दिलेल्या संख्येचे गट पाडले.
$\overline{1 . 21}$	2) बाजूस दाखविल्याप्रमाणे संख्येच्या वर वडावीकडे दोन रेषा काढल्या.
1 1 | 1.21 1 | -1 2 | 0	3) पहिल्या गटातील संख्येएवढी किंवा त्याच्या पेक्षा लहान वर्ग संख्या शोधली ती संख्या 1 आली. त्याचे वर्गमूळ 1 आले.•ती वर्गमुळ संख्या तीन वेळा तीन ठिकाणी लिहिले. एखादया भागाकारात व दोन वेळा वेरजेच्या स्वरुपात लिहून त्याची वेरीज केल वेरीज 2 आली नंतर वर्गमूळ आलेल्या संख्यांचा गुणाकार केला, गुणाकार 1 आला. तो गुणाकार पहिल्या गटाच्या खाली लिहून त्यांची वजावाकी केली. वजावाकी 0 आली.

1.1	
1 | 1.21	4) जर पहिल्या गटानंतर दशांस स्थळ आले तर पहिली किया झाल्यानंतर भागाकारात दशांस स्थळ दयावे.
+1 | -1	5) पहिल्या गटानंतर दुसरा गट खाली लिहून घेतला.
21 | 0 21	6) पहिल्या भागाकारावेळी आलेल्या वेरजेच्या समोर कोणती संख्या लिहावी म्हणजे ती संख्या व वेरीज करुन आलेली संख्या यांचा गुणाकार 21 येईल.
+1 | -21	7) जर 2 च्या पूढे 1,2,3 .... अशा संख्या लिहिल्या. आपणास 21,22,23,.... अशा सख्या मिळाल्या . या पैकी 1 हा अंक लिहिला असता 21 किंवा 21 ही संख्या मिळाली व दुसरा गट 21 आहे म्हणून 21 म्हणून 21 मधुन 21 वजा केले व बाकी शुन्य मिळाली.
22 | 00	
$\sqrt{1.21} = 1.1$	

उदा. 2. 998.56 चे भागाकार पध्दतीने वर्गमूळ काढा.

♦♦♦♦♦♦♦

प्रकरण 2 रे

घातांक

उजळणी - दिलेल्या घातांकित संख्येत पाया व घातांक आपणास ओळखता येतो.

उदा. 2^7 या उदाहरणात

2 ला पाया म्हणतात.

7 ला घातांक म्हणतात.

पाया परिमेय असते, तसेच घातांक ठिकाणी असणारी संख्या जर धन पूर्णांक, ऋण पूर्णांक, शुन्य असतील तर घातांकांचे नियम खालील प्रमाणे आपणांस सांगता येतील.

जर a व b या कोणत्याही परिमेय संख्या असून m आणि n या धनपूर्णांक संख्या असताना.

नियम	स्पष्टीकरण
1) $a^m \text{ X } a^n = a^{m+n}$	गुणाकारात जा पाया समान असेल तर घातांकाची वेरीज करावी.
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	भागाकारात तर पाया समान असेल तर घांताकाची बजाबाकी करावी.
3) $(a^m)^n = a^{m \times n}$	जर घातांकाचा घातांक असेल तर घातांकाची गुणाकार करावा लागतो.
4) $(a x b)^m = a^m \text{ x } b^m$	जर दोन संख्याच्या गुंणाकाराचा घात असेल तर त्या दोन संख्याच्या घातांकाचा गुणाकार होतो.
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	जर दोन संख्याच्या भागाकाराचा घात असेल तर त्या दोन संख्याच्या भागाकाराचा घात होतो.
6) $a^0 = 1$	जर कोणत्याही शुन्योत्तर संख्याचा जर 0 असेल तर त्याची किंमत 1 असते.
7) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	जरं a ही कोणतीही शुन्योत्तर परितमेय संख्या असेल व घातांक ऋण असेल तर त्या संख्येचा व्यस्त करुन धन केला. जातो.

उदा. घातांकाचे नियम वापरून [illegible]

1) **रीत** $8^4 \times 8^3 = 8^{\square}$ $= 8^{4+3}$ $= 8^7$ उत्तर $= 8^4 \times 8^3 = 8^{\boxed{7}}$	**स्पष्टीकरण** 1) पाया 8 समान आहे. गुणाकार आहे म्हणून घातांक बेरजेच्या स्वरुपात लिहीला. 3) घातांकांची बेरीज 7 आली.
2) **रीत** $6^3 \div 6^2 = 6^{\square}$ $= 6^{3-2}$ $= 6^1$ उत्तर $= 6^3 \div 6^2 = 6^{\boxed{1}}$	**स्पष्टीकरण** 1) पाया 6 समान आहे. म्हणून घातांक 3-2 वजावाकीच्या स्वरुपात लिहीला. 3) घातांक 3-2 हा वजावाकी केली ती एक आली.
3) $(13 \times 11)^3 = 13^{\square} \times 11^{\square}$ $= 13^{\boxed{3}} \times 11^{\boxed{3}}$	3 व 11 या संख्याच्या गुणाकाराचा घात 3 आहे. म्हणून प्रत्येक संख्येचा म्हणजे 13^3 व 11^3 घातांक दिला.
4) उदा : $5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$ $5^{-3} = \frac{1}{5^{\boxed{3}}}$	घातांक ऋण संख्या आहे.म्हणून $\frac{5^3}{1}$ चा व्यस्त केला आहे. तो $\frac{1}{5^3}$ झाला म्हणून चौकटीत 3 आले.
5) $5^0 = \square$ म्हणून $5^0 = 1$	5 या संख्येचा घातांक 0 आहे म्हणून $5^0 = 1$ असते.

घातांक अपूर्णांक संख्या -:

आपण दोन अपूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी ज्या नियमांनी केली जाते त्याच नियमांचा वापर घातांक अपूर्णांक संख्या असेल तर केला जातो. खाली अपूर्णांकाची बेरीज व वजाबाकी केली आहे.

1) रीत	स्पष्टीकरण
$\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$	समच्छेद अपूर्णांकाची बेरीज करताना छेद 3 आहे. तोच घेवून स्वरुपात लिहीला.
$\frac{2+5}{3}$	2 +5 यांची बेरीज केली ती 7 आली.
$= \frac{7}{3}$	

वरील नियमांचा वापर करुन सरळ रुप दया

रीत	स्पष्टीकरण
$7^{\frac{4}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}$	1) पाया समान आहे. म्हणून घातांकांची बेरीज केली.
$7^{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}$	म्हणून $a^m \times a^n = a^{m+n}$
$= 7^{\frac{4+1}{3}}$	समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज केली
$= 7^{\frac{5}{3}}$	अंश 4 + 1 = 5 बेरीज केली.

उदा. 2

रीत	स्पष्टीकरण
$2^{½} \times 2^{1/3}$	पाया समान म्हणून $a^m + a^n = a^{m+n}$ नियम वापरला.
$= 2^{½ + 1/3}$	
$= 2^{\frac{3+2}{2 \times 3}}$	भिन्न छेद अपूर्णांकांची बेरीज केली.
$= 2^{\frac{5}{6}}$	अंश = 2+3 = 5 बेरीज केली. छेद = 2X3 = 6 गुणाकार केला.

रीत	स्पष्टीकरण
$100^{3/2} \div 100^{1/2}$	पाया समान आहे. भागाकार आहे म्हणून घातांकाची वजाबाकी केली.
$= 100^{3/2 - 1/2}$	$a^m/a^n = a^{m-n}$
$= 100^{\frac{3-1}{2}}$	समच्छेद अपूर्णांकांची वजाबाकी केली.
$= 100^{\frac{2}{2}}$	वजाबाकी = 3-1 = 2 आली. म्हणून 2/2 = 1 परंतू 1 घातांक लिहिला जात नाही.
उत्तर = 100	

उदा. 5.

रीत	स्पष्टीकरण
$X^{1/2} \div X^{2/3}$	पाया समान आहे. भागाकार आहे म्हणून घातांकाची वजाबाकी केली.
$= X^{1/2 - 2/3}$	½ - 1/3
$= X^{\frac{3-2}{6}}$	छेदाचा लसावि काढला व अंशामध्ये तिरकस गुणाकार केला.
$= X^{\frac{1}{6}}$	3 – 2 = 1 अंशाची वजाबाकी केली.

स्वाध्याय -

सरळ रुप दया

1) $(2/5)^{1/2} \times (2/5)^{1/3}$

2) $(3)^{2/3} \div (3)^{1/3}$

3) $(5)^{3/4} \times (5)^{1/4}$

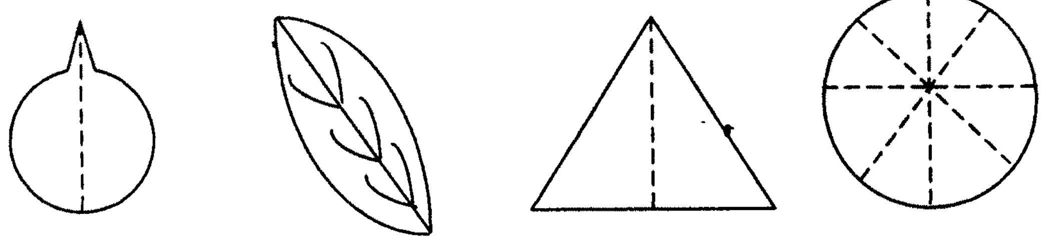
4) $(6)^{3/5} \div (6)^{1/2}$

♦♦♦♦♦♦♦

प्र. 3 रे

सममिती

प्र. 2 खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



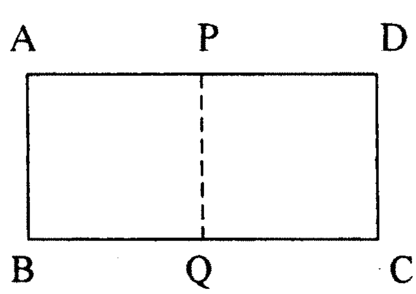
(1) (2) (3) (4)

वरील अकृत्यांचे निरीक्षण केले तर आपणास असे दिसते की, आपण तुटक रेषेवर जर घडी घातली तर त्या आकृतीचे दोन भाग एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात म्हणून अशा आकृत्यांना सममित आकृत्या असे म्हणतात.

टीप :- ज्या तुटक रेषेवर घडी घालतो त्या रेषेचे सममिती अक्ष असे म्हणतात.

उदा. खालील आकृतीला सममिती अक्ष किती आहेत ते सांगा.

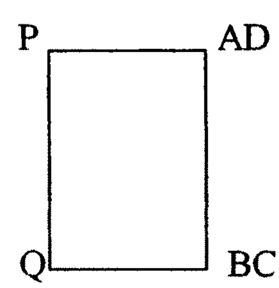
रीत



स्पष्टीकरण

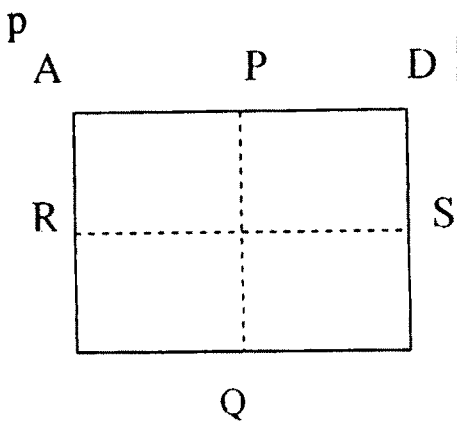
प्रथम pq या रेषाखंडावर घडी घातली ती

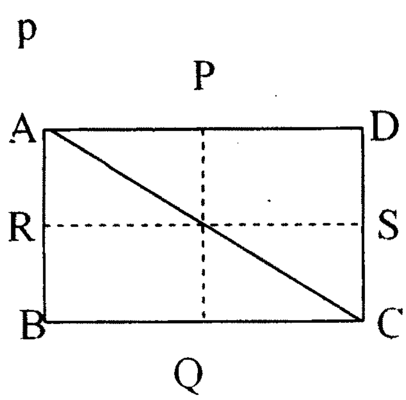
आकृती आपणास खालील पध्दतीने दिसते.



म्हणजे 1) $< A \cong \; < B$ व

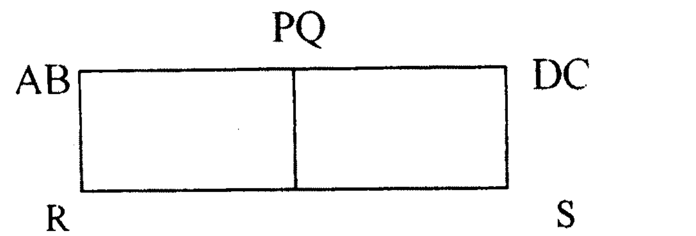
2) $< B \cong C$ मिळतो. म्हणून रेख PQ हा अक्ष होईल.





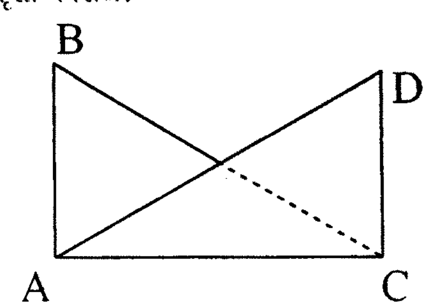
उत्तर : - आयताला सममितीचे 2 अक्ष असतात.

आता आपण रेषाखंड वर घडी घासली पध्दत तीजे दिसेल.



म्हणून < A ≅ <B, <D≅ <C असेल म्हणून रेख RS हा दुसरा सममिती अक्ष आहे.

म्हणून रेख वर घडी घातली तर आपणास खालील प्रध्दतीजे आकृती दिसेल.



म्हणून M<B≠ MLD म्हणून LB व LD एकरुप नाहीत.

म्हणून रेख AC हा सममिती अक्ष होणार नाही.

?तसेच रेख BD हा देखील सममिती अक्ष होणार नाही.

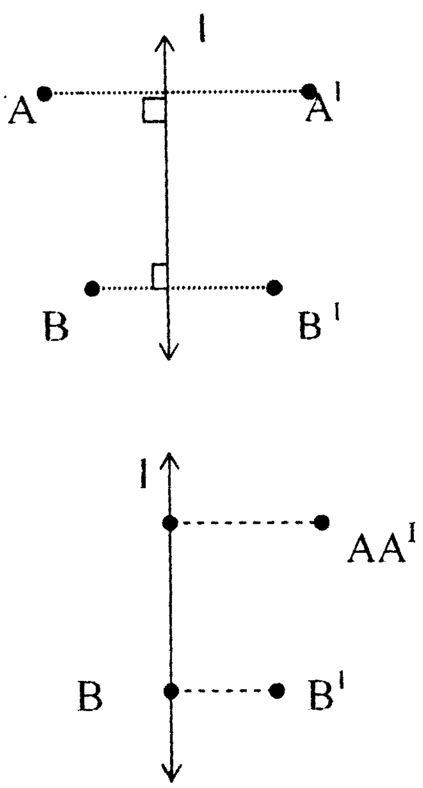
स्वाध्याय : - खालील आकृत्यांचे सममिती अक्ष काढा.

1) समभुज त्रिकोण   2) चौरस

3) वर्तुळ   4) विषमभुज त्रिकोण.

परावर्तन बिंदू काढणे :-

परावर्तन बिदू ही संकल्पना आपण दररोज आपल्या व्यवहारात वापरतो. आपण आपली पतिमा जेंव्हा आरशात पाहतो तेंव्हा आरशात आपली परावर्तन प्रतिमा दिसते. प्रतिमा ही अनेक बिंदूंनी तयार होते. परावर्तन बिंदू आपणास खालील पध्दतीने काढता येईल.



स्पष्टीकरण

बाजूची आकृती पहा

जर आपण रेषा L वर घडी घातली असता बिंदू A हा त्याचा संगत बिंदू A^{I} शी व बिंदू B हा संगत बिंदू B^{I} शी तंतोतंत जूळत असेल तर आपण A चा A^{I} व B चा B^{I} हा परावर्तन बिंदू आहे असे म्हणतो.

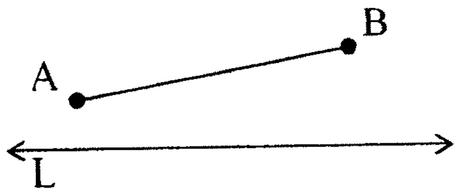
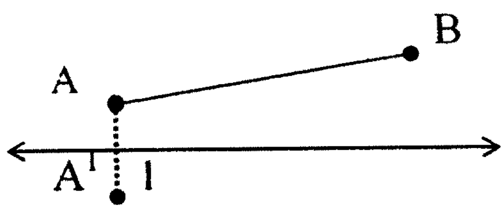
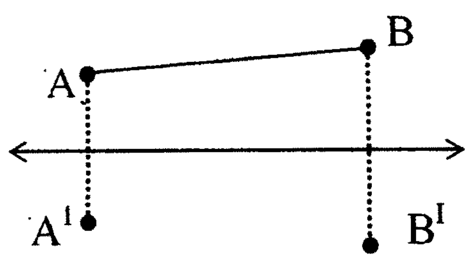
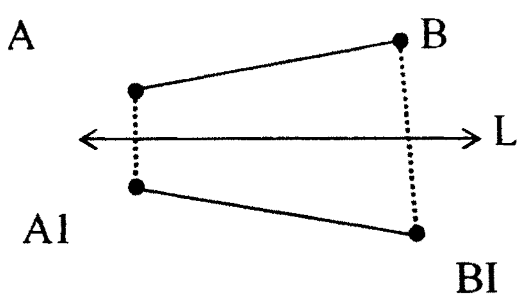
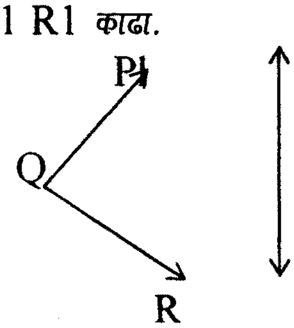
तसेच रेषा L ⊥ रेख AA^{I} व रेषा L ⊥ रेख BB^{I} असते.

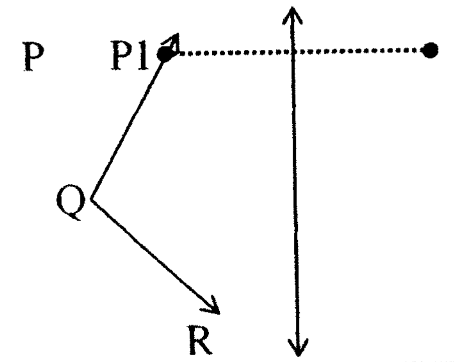
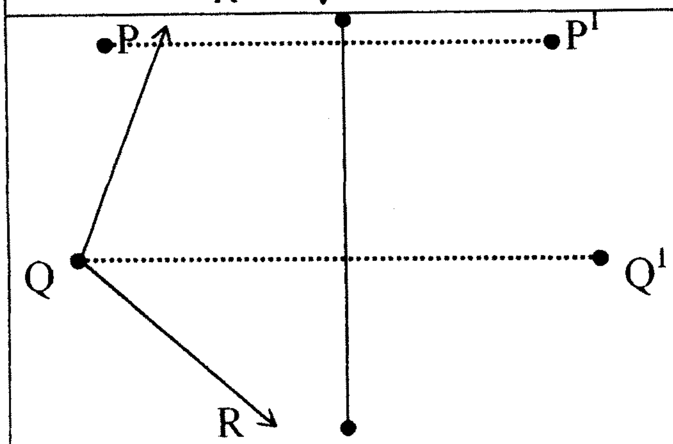
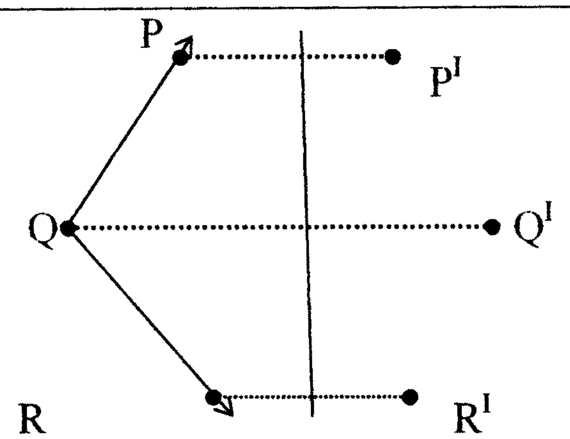
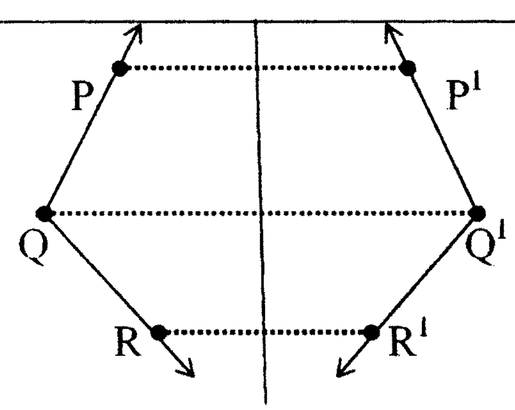
टीप -: 1. परीवर्तन बिंदू हा रेषा l च्या विरुध्द अंगास असतो.
2. दिलेल्या बिंदू त्या रेषा पासून जितक्या अंतरावर असातो. तितक्याच अंतरावर परावर्दन बिंदू असतो.

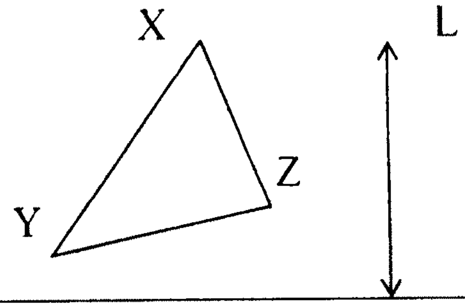
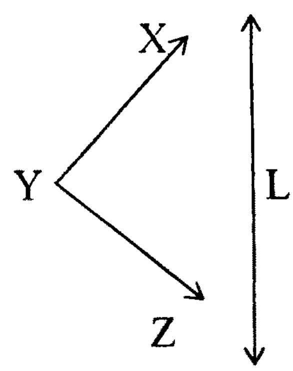
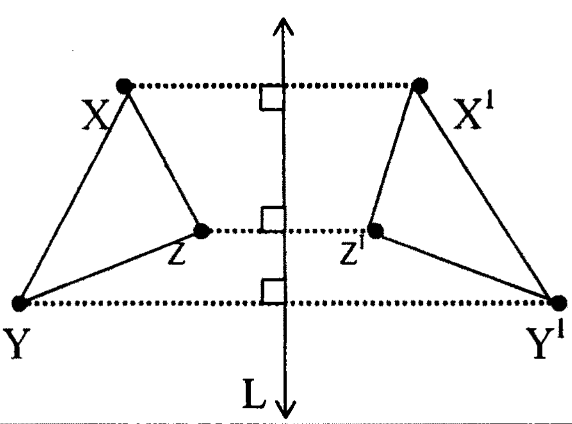
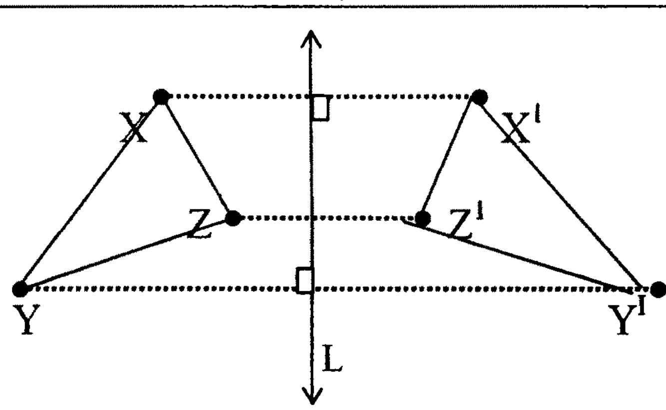
परावर्तन आकृत्या काढणे -:

परावर्तन बिंदू काढण्याच्या कृतीचा उपयोग करुन परावर्तन आकृत्या काढू.

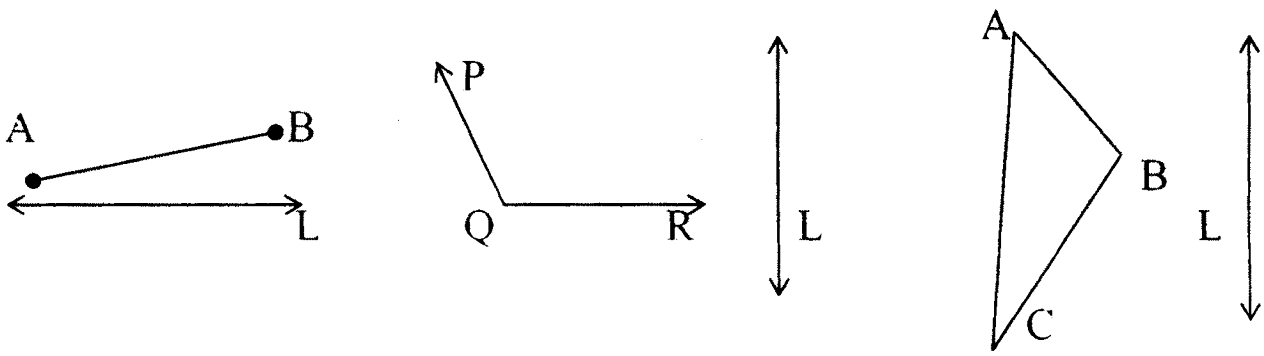
उदा. 1. रेषा L च्या संदर्भात रेषाखंड AB चा परावर्तन रेषाखंड $A^{I}B^{I}$ चा परावर्तन रेषाखंड काढा.	स्पष्टीकरण 1) रेषा L काढली. रेषेच्या वरच्या बाजूस AB हा रेषाखंड काढला.

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>2) बिंदू A चा परावर्तन बिंदू A1 काढला.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>3) बिंदू B चा परावर्तन बिंदू B काढला.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>4) बिंदू A1 B1 जोडले.
म्हणून AB चा रेख A1 B1 हा परावर्तन रेषाखंड मिळाला.</td></tr>
<tr><td>उदा. रेषाखंड l संदर्भाजत <PQRचा परावर्तन < P1 Q1 R1 काढा.

</td><td>1) रेषा l च्या संदर्भात कोणताही <PQR काढला.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td>बिंदु P चा परावर्तन बिंदू P1 काढला.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>बिंदू R चा परावर्तन बिंदू R1काढला.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>बिंदू R परावर्तन बिंदु R^1 काढला.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>शेवटी P^1 Q^1 व Q^1 P^1 जोडला अशा पध्दतीने हा
<PQR या <$P^1 Q^1 R^1$ हा परार्वतन कोन मिळाला.</td></tr>
</table>

उदा. 3) रेषा L च्या संदर्भात ΔXYZ चा परार्वन $\Delta X^1 Y^1 Z^1$ चा परावर्तन काढा.  	प्रथम रेषा l च्या संदर्भात Δ xyz काढला.
रीत  	स्पष्टीकरण विंदू X चा परावर्तन विंदू X^1 काढला.
 	वरील पध्दतीने X चा X , Y चा Y^1 व Z चा Z^1 हा परावर्तन बिदू काढला.
 	त्रिकोण XYZ चा परावर्तन त्रिकोण $X^1 Y^1 Z^1$ मिळाला.

स्वाध्याय -: खालील आकृत्यांचे रेषा च्या संदर्भात परावर्तन आकृत्या काढा.



◆◆◆◆◆◆◆

प्रकरण 4

प्रकरण 4

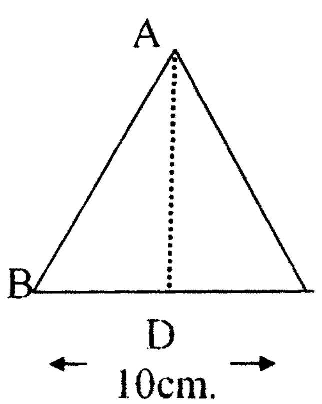
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

उजळणी -: त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}$ × पाया × उंची या सूत्राचा उपयोग करुन आपण त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढले. आहे.

टीप-: 1. उंची नेहमी लांब असते.

2. ज्या बाजूवर लंब असतो तो पाया असतो.

1. उदा. Δ ABCमध्ये l(BC) = 10cm.रेख AD⊥ बाजू BC आणि l(AD) =3cm. ΔABC चे क्षेत्रफळ काढा.

रित	स्पष्टीकरण
	l(BC) = पाया 10cm. l(AD)= उंची 3cm. या किंमती लिहल्या.
2. Δ ABC चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ x पाया xउंची	त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सुत्र लिहले.
3. A (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ x BC x AD $= \frac{1}{2}$x 10 x3 = 5x 3 = A (Δ ABC) = 15cm.	पाया BC =10 व उंची AD = 3 सुत्रात किंमती लिहून सोडवले.

2) त्रिकोणाच्या जर बाजूनी लांबी दिली असता त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे खालील सूत्राचा वापर केला जातो.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

या सूत्रालाच शिरोचे सूत्र म्हणतात.

a → त्रिकोणाची पहिली वाजू

b → त्रिकोणाची दुसरी वाजू

c → त्रिकोणाची तिसरी वाजू

व s = अर्धपरिमिती

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

या सूत्राचा वापर करुन अर्धपरिमिती काढली जाते.

उदा. एका त्रिकोणाच्या बाजू 22 सेमी , 20 सेमी, व 18सेमी, आहेत तर त्याची अर्धपरिमिती काढा.

रीत	स्पष्टीकरण
1) a = 22 cm., b= 20 cm.c = 18 cm.	1) दिलेल्या बाजू a , b, c बरोबर घेतल्या.
$s = \frac{a + b + c}{2}$	अर्धपरिमितीचे सुत्र लिहले.
म्हणून $s = \frac{22 + 20 + 18}{2}$ म्हणून $s = \frac{60}{2}$	सुत्रामध्ये किमती लिहून बेरीज केली.
म्हणून s = 30 cm.	आलेल्या बेरजेला 2 ने भागले.

स्वाध्याय :- एका त्रिकोणाच्या बाजू 26 सेमी , 13 सेमी , व 17 सेमी आहेत तर त्याची अर्धपरिमिती काढा.

Δ_PQR , l(PQ) = 13cm. , l(QR) = 15cm. l(PQ) = 14cm., ΔPQR ची अर्धपरिमिती काढा.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ -: त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ खालील दोन सूत्रांचा वापर करुन काढले. जाते.

1. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ x पाया x उंची

2. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\sqrt{s (s- a) (s- b) (s- c)s}$

उदा. -: 1) एका त्रिकोणाच्या बाजू 17 मी, 25मी, व 26 मी,आहेत. तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

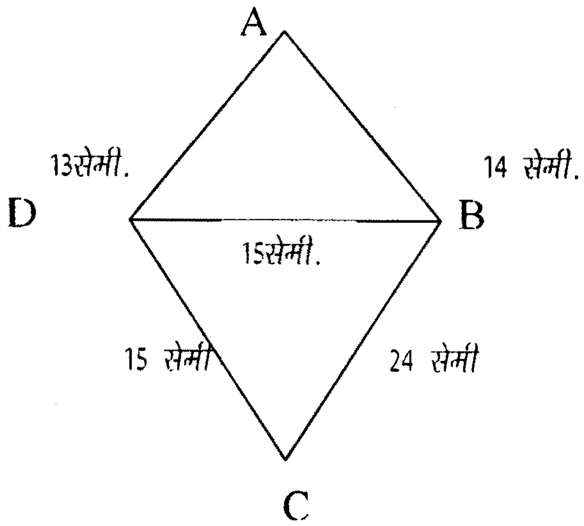
रीत	स्पष्टीकरण
a = 17m., b= 25m., c = 26 m. म्हणून s $\frac{a + b + c}{2}$	a , b, c, च्या किंमती लिहून अर्धपरिमीतीचे सुत्र लिहले.
म्हणून s = $\frac{17+ 25+ 26}{2}$ s = $\frac{8}{2}$ s = 34 m.	a, b, c, च्या किंमती लिहून s ची किंमत काढली.
रीत त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\sqrt{s (s-a) (s-b) (s-c)}$ = $\sqrt{34 (34 -17) (34-25) (34-26)}$ = $\sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8}$	हिरो चे सुत्र लिहले व a, b, c च्या किंमती लिहल्या. कंसातील संख्यांची वजाबाकी केली.
= $\sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2}$ = $\sqrt{17 \times 17 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4}$	फोड करुन दोन दोन समान संख्याचे गट केले.
= 17 x 3 x 4 = 17 x 12 = 204 म्हणून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 204 चौरस cm.	प्रत्येक गटातून एक संख्या घेवून गुणाकार केला.

उदा. 2) 68 मी. 84मी. व 40 मी. बाजू असलेल्या शेतातील तण काढण्यासाठी 20 पैसे प्रतिचौरस मीटरप्रमाणे किती खर्च येईल?

रीत	स्पष्टीकरण
$a = 68m.,\ b = 84m.,\ c = 40m.$ म्हणून $s = \frac{a+b+c+}{2}$ $= \frac{68 + 84 + 40}{2}$ $= \frac{192}{2}$ म्हणून $s = 96m.$	a, b, c, च्या किंमती लिहून अर्धपरिमिती सुत्र वापरले. त्या वरु न s ची किंमत काढली.
म्हणून शेताचे क्षेत्रफळ = $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \sqrt{96(96-68)(96-84)(96-40)}$	शिरोचे सुत्र वापरुन किंमती लिहल्या.
$= \sqrt{96 \times 28 \times 12 \times 56}$	कंसातील संख्याची वजाबाकी केली.
$= \sqrt{14 \times 14 \times 12 \times 12 \times 4 \times 4}$ $= 14 \times 12 \times 4$ $= 56 \times 12$ $= 672$	संख्याची फोड केली ह समान दोन दोन संख्याचे गट करुन एक एक संख्या घेवून गुणाकार केला.
म्हणून एकूण खर्च = $= 672 \times 20$ $= 13440$	1 चौ. मी. ला 20 पै. म्हणून आलेल्या क्षेत्रफळाला 20 ने गुणले.
$= \frac{13440}{100}$ $= 134.40$ रु. म्हणून एकूण खर्च $= 134.40$ रु.	पैसेचे रुपांतर रुपयात केले. 1 रु = 100 पैसे म्हणून 1000 ने भागले.

स्वाध्याय- 1) एका त्रिकोणात बाजू 25 सेमी , 39 सेमी, व 56 सेमी , आहेत तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

2) खाली दिलेल्या आकृतीतील माहितीच्या आधारे □ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.



♦♦♦♦♦♦♦

प्रकरण 5

नित्यसमीकरणे - विस्तार

उदा. -: 1) $3(x + 2) = 2x + 7$

या समीकरणात $x = 1$ ठेवल्यास

म्हणून डावी बाजू $= 3(x+2)$

$=3(1+2)$

$= 3x3$

म्हणून डावी बाजू $= 9$

उजवी बाजू $= 2x +7$

$= 2. 1 + 7$

$= 2+7$

$= 9$

म्हणून डाव्या बाजूची किंमत = उजव्या बाजूची किंमत

म्हणून $x = 1$ ही एकमेव उकल आहे.

2) उदा. $= 2 (x +3) = 2x + 6,$

म्हणून या समीकरणात $x = 1, 2, ...$ ठेवू.

$x = 1$ असताना

डा. बा. $= 2 (x + 3)$

$= 2 (1+3) = 2 x 4$

$= 8$

उ. बा. $= 2x + 6$

$= 2.1+ 6$

$= 8$

म्हणून डा. बा. = उ. बा.

आता $x = 2$ असताना

म्हणून डावी बाजू $= 2(x + 3)$

$= 2(2 + 3)$

$= 2.5$

$= 10$

व उ. बा. $= 2x + 6$

$= 2.2 + 6$

$= 4 + 6$

$= 10$

म्हणून डा. बा. = उ. बा.

या समीकरणाच्या अनेक उकली आहेत.

व्याख्या -: ज्या समीकरणाचे समाधान त्यातील चलाच्या कोणत्याही किंमतीने होते. त्यास नित्य समीकरण असे म्हणतात.

खाली काही नित्य समीकरणे दिली आहेत.

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a = पहिले पद

b = दुसरे पद

(पहिले पद + दुसरे पद $)^2$ = (पहिले पद $)^2$ + 2(पहिलेपद) (दुसरे पद) + (दुसरे पद $)^2$

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(पहिले पद - दुसरे पद $)^2$ = (पहिलेपद $)^2$ – 2 (पहिले पद) (दुसरे पद) +(दुसरे पद$)^2$

3) $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

(पहिले पद $)^2$ – (दुसरे पद $)^2$ = (पहिले पद + दुसरे पद) (पहिले पद – दुसरे पद)

उदा. 1) सूत्र वापरुन विस्तार करा.

रित	स्पष्टीकरण
$(x+3)^2$ $=(x)^2+2(x)(3)+(3)^2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ या सुत्रात बसविले
$x^2+2.3x+9$	$x^2, 3^2, x.3$ चा गुणाकार केला.
$=x^2+6x+9$ म्हणून $(x+3)=x^2+6x+9$	2व 3 चा गुणाकार केला.

उदा. 2) $(3ab-2pq)^2$

रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून $(3ab-2pq)^2$ $=(3ab)^2-2(3ab)(2ab)+(2pq)^2$	$(a\text{-}b)=a^2-2ab+b^2$ या सुत्रात बसवले.
$=9a^2b-2.6abpq+4p^2q^2$ $=9a^2b-12abpq+4p^2$	म्हणून वर्ग केला व गुणाकार केला.

स्वाध्याय -: सुत्र वापरुन विस्तार करा.

1) $(x+3y)^2$, $(x^2+y^2)^2$, $(2a-3b)^2$

टीप -: वरील सूत्रांचा उपयोग करुन काही संख्याचे वर्ग करणे सोपे होते.

उदा. - सूत्र वापरुन किंमती काढा.

उदा. $(102)^2$

$= (102)^2 = (100+2)^2$	102 ची फोड केली = 100 + 2, 100, 1000, ... 10, 20, ... 100, 1000, ... अशा संख्यांचा वर्ग करणे सोपे होते. म्हणून 100+ 2 अशी फोड केली जाते.
$= (100)^2 + 2 . 100 . 2 + (2)^2$ $= 10000 + 400 + 4$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सूत्र वापरले वर्ग व गुणाकर केला.
म्हणून $(102)^2 = 10402$	बेरीज केली.

उदा. 2) 99^2

म्हणून $(99)^2 = (100-1)^2$	99 ची फोड 100 - 1 अशी केली.
$= (100)^2 - 2. 100. 1 + (1)^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ या सुत्राचा उपयोग केला.
$= 10000 - 200 + 1$ $= 10001 - 200$	वर्ग व गुणाकार केला. 1000 + 1 यांची बेरीज केली.
म्हणून $(99)^2 = 9801$	वजाबाकी केली.

स्वाध्याय -: सुत्र वापरुन किंमत काढा.

1. $(196)^2$, $(1009)^2$, $(69)^2$, $(149)^2$

आणखी काही नित्यसमीकरणे -:

1) $(a+b)^3$ चा विस्तार -

$= (a+b)^3$ चा विस्तार म्हणजेच $(a+b)$ या कंसाचा तीन वेळा गुणाकार करणे होय.

म्हणून

म्हणून $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

शब्दात सुत्र खालीलप्रमाणे सांगता येईल.

a - पहिले पद

b - दुसरे पद

म्हणून (पहिले पद + दुसरे पद $)^3$ = (पहिले पद $)^3 + 3$ (पहिले पद) x (दुसरे पद) + 3 (पहिले पद) x (दुसरे पद $)^2$ + (दुसरे पद $)^3$

2. $(a-b)^3$ चा विस्तार -
वरील प्रमाणेच याचाही विस्तार केला जातो.

म्हणून $(a-b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3ab^2 - b^3$

(पहिले पद - दुसरे पद $)^3$ = (पहिले पद $)^3 - 3$ (पहिले पद$)^2$ x (दुसरे पद) + 3 (पहीले पद) x (दुसरे पद $)^2$ – (दुसरे पद $)^3$

वरील सुत्रांचा उपयोग करुन उदाहरणे सोडवू
उदा. 1) $(a+b)^3$

रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून $(a+b)^3 = (a)^3 + (a)^2(3) + 3(a)(3)^2 + (3)^3$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ या सुत्राचा उपयोग केला.
$= a^3 + 3a^2.3 + 3a.9 + 27$ $= a^3 + 9a^2 + 27a + 27$ म्हणून $(a+3)^2 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$	वर्ग केले. गुणाकार केला.

उदा. $(3b-4)^3$

रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून $(3b-a)^3 = (3b)^3 - (3b)^2(4) + 3(3b)(4)^2 - (4)^3$	$= (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$ या सुत्राचा उपयोग केला.
$= 27b^3 - 3.9b^2.4 + 3.3b.16 - 64$	वर्ग व घन केले.

$= 27b^3 - 108b^2 + 144b - 64$	गुणाकार केला.
म्हणून$(3b-4)^3 = 27b^3 - 108b^2 + 144b - 64$	योग्य उत्तर मिळाले.
उदा. 3) 99^3 करा.	
म्हणून $(99)^3 = (100-1)^3$	99ची फोड (100 – 1) अशी केली.
$= (100)^3 (100)^2 (1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 1$ या सुत्राचा उपयोग केला.
$= 1000000 - 3.10000.1 + 3.100.1 - 1$	वर्ग व घन केले.
$= 1000000 - 30000 + 300 - 1$	गुणाकार केला.
$= 1000300 - 30001$	समान चिन्हे असणा-या संख्याची बेरीज केली.
म्हणून $(99)^3 = 970299$	भिन्न चिन्ह आहेत म्हणून वजाबाकी केली व मोठया संख्येचे चिन्ह दिले.

स्वाध्याय - सुत्राचा उपयोग करुन सोडवा.

1) $(4a+5b)^3$, $(ab-cd)^3$, $(102)^3$, $(10)^3$

♦♦♦♦♦♦♦

प्रकरण 6

एकचल समीकरणे

व्याख्या -: ज्या समीकरणात एकाच चलाचा चा वापर केला जातो व त्या चलाचा जास्तीत जास्त घातांक 1 असतो अशा समीकरणांना एकचल समीकरणे असे म्हणतात.

उदा. 1) $x + 3 = 5$

2) $2x - 3 = 6$

3) $5y + 2 = 32$

एकचल समीकरणे सोडविण्यासाठी केल्या जाणा-या कृती-

1) समीकरणाच्या दोन्ही बाजूस एकच संख्या मिळवली.	उदा. $x - 2 = 3$ म्हणून $x - 2 + 2 = 3 + 2$ .... 2मिळवले.
2) समीकरणाच्या दोन्ही बाजूस एकच संख्या वजा केली.	उदा. - $x + 2 = 3$ म्हणून $x + 2 - 2 = 3 - 2$ .... 2वजा केले.
3) समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना एकाच संख्येने भागले. शुन्योत्तर	$2x + 3 = 7$ म्हणून $2(2x + 3) = 7x2$ ...2 ने गुणले. म्हणून $2x\ 2x + 2.3 = 7x2$ गुणले.
4) समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना एकाच संख्येने भागले शुन्योत्तर	म्हणून $2x = 16$ म्हणून $\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$ ...... 2 ने भागले.

वरील सर्व किया करून एकचल समीकरणे सोडविली जातात.

उदा. $x + 7 = 8$

रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून $x + 7 - 7 = 0\ 8 - 7$ म्हणून $x + 0 = 1$ म्हणून $x = 1$	7 वजा केले. वजाबाकी केली.

वरील समीकरणात ताळा करु.

डावी बाजू $= x + 7$ $= 1 + 7$ $= 8$ .... (1)	समीकरण सोडवून आलेली ची किंमत ठेवली व बेरीज केली.
उजवी बाजू $= 8$ ...... (2) म्हणून डावी बाजू = उजवी बाजू	समीकरण 1 , व 2 वरुन

उदा. 2) $11 (3x + 7) = 13 (8z\text{-}s)$

रित	स्पष्टीकरण
म्हणून $11 (3x + 7) = 13 (8x- 5)$ म्हणून $33x + 77 = 104x - 65$ म्हणून $33x + 77- 77 = 104x - 65 -77$ म्हणून $33x = 104x - 142$ म्हणून $33x - 104x = 104x- 104x- 142$ म्हणून $- 71x = - 142$ म्हणून $\frac{-71x}{-71} = \frac{-142}{-71}$ म्हणून $x = 2$	कंसाच्या बाहेरील संख्येने कंसातील प्रत्येक संखेस गुणले. म्हणून 77 वजा केले. म्हणून 104x वजा केले. सजातीय पदांची बेरीज केली. - 71 ने भागले.

उदा. 2) $\frac{2x + 5}{3x + 1} = \frac{3}{11}$

म्हणून $11 (3 x + 7) = 13 (8x - 5)$ $33x + 77= 104\text{-}65$ म्हणून $33x + 77\text{-}77= 104x -65\text{-}77$ म्हणून$33x = 104x - 142$ म्हणून$33x\text{-} 104x = 104x\text{-}104x - 142$ म्हणून $-71x = -142$ $= \frac{-71x}{-71} = \frac{-142}{-71}$ म्हणून $x = 2$	कंसाच्या बाहेरील संख्येने कंसातील प्रत्येक संख्येस गुणले. 77 वजा केले 104 x वजा केले सजातीय पदांची बेरीज केली - 71 ने भागले.

उदा -: 2) $\frac{2x + 5}{3x + 11} = \frac{3}{11}$

म्हणून $\frac{2x + 5}{3x + 1} = \frac{3}{11}$ म्हणून $11 (2x + 5) = 3 (3x + 1)$ म्हणून $22x + 55 = 9x + 3$ म्हणून $22x + 55 - 55 = 9x + 3 - 55$ म्हणून $22x - 9x = 9x - 9x - 52$	तिरकस गुणाकार केला. कंस सोडवले. म्हणून 55 वजा केले. 9 x वजा केले.
रीत	**स्पष्टीकरण**
म्हणून $13x = -52$ म्हणून $\frac{13x}{13} = \frac{-52}{13}$ म्हणून $x = -4$	13 ने भागले

स्वाध्याय खालील समीकरणे सोडवा .

1) $2 (11y - 1) = 8y + 12$

2) $\frac{x + 2}{x - 3} = \frac{7}{2}$

3) $\frac{5x - 4}{2x} = 4$

लेखी उदाहरणे :-

उदा . 1) दोन भावांच्या आजच्या वयातील अंतर 4 वर्षे आहे. 5 वर्षापूर्वी त्यांच्या वयांचे गुण्णोत्तर $\frac{5}{7}$ होते. तर त्यांची आजची वये काढा.

रीत	स्पष्टीकरण
लहान भावाचे वय $= x$ मानू म्हणून मोठया भावाचे वय $= x + 4$	दोघांची वये दिलेल्या अटीनुसार लिहिली.
म्हणून लहान भावाचे वय $= x - 5$ व मोठया भावाचे वय $= x + 4 - 5$ $= x - 1$	5 वर्षा पूर्वी दोघांची वये काढली.

$\frac{x-5}{x-1} = \frac{5}{7}$	म्हणून 5 वर्षापुर्वीचे त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर = $\frac{5}{7}$ लिहले.
म्हणून $7(x-5) = 5(x-5)$ म्हणून $7x - 35 = 5x - 25$ म्हणून $7x - 35 + 35 = 5x - 25 + 35$ म्हणून $7x = 5x + 10$ म्हणून $7x - 5x = 5x - 50 + 10$ $2x = 10$ $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ $x = 5$ म्हणून लहान भावाचे वय = x = 5वर्षे मोठया भावाचे वय = x + 4 = 5+ 4 = 9वर्षे.	तिरकस गुणाकार केला. कंस काढले. 35 मिळावले. म्हणून 5x वजा केले. म्हणून 2 ने भागले. x किंमत ठेवली. x ची किंमत ठेवली.

म्हणून स्वाध्याय -: समीकरणे तयार करुन सोडवा

1) पहिली संख्या दूस-या संख्यापेक्षा 7 ने लहान आहे. पहिल्या संख्येचे दूस-या संख्येशी गूणोत्तर 4: 5 आहे. तर त्या संख्या काढा.

2) एका अपूर्णाकांचा छेद अंशापेक्षा 12 ने मोठा आहे. त्यांच्या अंशातून 2 वजा करुन आणि छेदात 1 ने मिळवून तयार होणारा अपूर्णाक $\frac{1}{\;}$ शी सममुल्य आहे, तर तो अपूर्णाक कोणता

(अंश = x घ्या.)

प्रकरण 8

अपरिमेय व वास्तव संख्या

* परिमेय संख्या -

ज्या संख्या आवर्ती दशांश रुपात व्यक्त करता. येतात अशा संख्याना परिमेय संख्या म्हणतात. किंवा ज्या संख्या p/q ($q \neq 0$) या स्वरुपात मांडता येतात अशा संख्याना परिमेय संख्या असे म्हणतात.

उदा. $\frac{2}{3}$, - $\frac{1}{5}$, 5, 0, - $\frac{3}{2}$ इ.

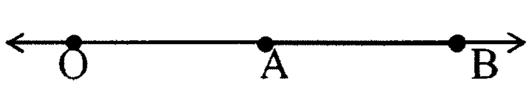
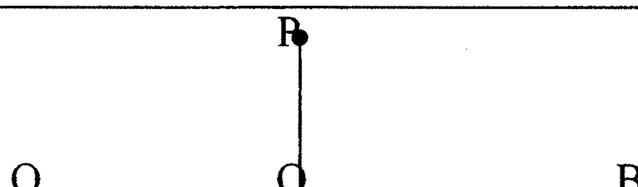
* अपरिमेय संख्या -:

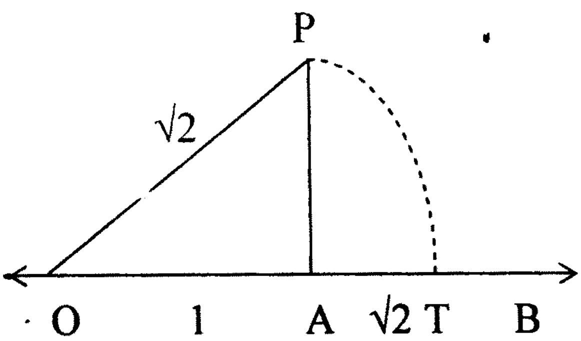
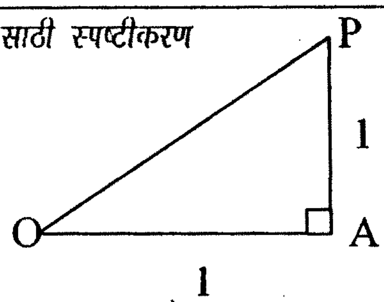
ज्या संख्याचे दशांश रुप अनावर्ती असते अशा संख्याना अपरिमेय संख्या असे म्हणतात.

उदा. $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, इ.

* अपरिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखविणे : -

उदा. $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या, संख्या रेषेवर दाखविणे.

रीत	स्पष्टीकरण
	प्रथम l ही रेषा काढली.
	O हा आरंभविंदू घेवून l सेमी अंतरावर विंदू A घेतला.
	बिंदू A च्या वरच्या बाजूस 1 सेमी अंतरावर बिंदू P घेतला.

	कंपासात l(OP) ही त्रिज्या घेतली व T बिंदू निश्चित केला. तो बिंदू म्हणजे $\sqrt{2}$ ही संख्या होय.
$\sqrt{2}$ साठी स्पष्टीकरण 	Δ OPA मध्ये पायथागोरस प्रमेय वापरुन $l(OP)^2 + l(AP)^2$ $= (1)^2 + (1)^2 = 1+1 = 2$ म्हणून वर्गमूळ घेवून म्हणून $l(OP) = \sqrt{2}$

स्वाध्याय :- $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ या संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

* वास्तव संख्या -:

सर्व परिमेय व अपरिमेय संख्याना मिळून वास्तव संख्या असे म्हणतात.

नैसर्गिक संख्या पूर्ण संख्या, पुर्णाक संख्या, परिमेय संख्या, व वास्तव संख्या सर्व संख्या या वास्तव संख्या म्हणतात. सर्व वास्तव संख्या संख्या रेषेवर दाखविता येतात. म्हणून या सर्व संख्याना वास्तव संख्यारेषा असे म्हणतात.

वर्गमूळ तक्याचा उपयोग करुन वर्गमूळ काढणे.

1) 3 म्हणून $x = 3$ म्हणून $\sqrt{x} = \sqrt{3}$ म्हणून $\sqrt{3} = 1.732$ उत्तर-: म्हणून $\sqrt{3} = 1.732$	प्रथम ती संख्या x मानली. त्या संख्या वर्गमुळाच्या चिन्हात ठेवल्या. तक्यातील x च्या खाली 3 पर्यत गेलो व 3 च्या उजवीकडील व $\sqrt{x}$ च्या स्तंभाखालील संख्या पाहीली ती 1.732 ही मिळाली.

टीप -:

वर्गमुळ तक्त्यामध्ये 99 पर्यंतच्या संख्याचे वर्गमूळ दिले आहे. त्याच्या पेक्षा मोठया संख्यांचे वर्गमूळ ही तक्यांचा उपयोग करुन काढता येते.

रीत	स्पष्टीकरण
उदा. = 372 1. 372 = 4 x 93	प्रथम दिलेल्या संख्येने अशा अवयवांच्या गुणाकाराच्या रुपात मांडू की ज्यांची वर्गमूळे तक्यात असतील 4 x 93 असे अवयव मिळाले.
$\sqrt{372} = \sqrt{4} \times \sqrt{93}$	वर्गमुळाचे चिन्ह दिले.
$\sqrt{372} = 2 \times 9.644$	4 चे व 93 चे वर्गमूळ वरील पध्दतीने वर्गमूळ तक्यात पाहिले.
$\sqrt{372} = 19.288$ $\sqrt{372} = 19.288$	तक्यातील संख्याचा गुणाकार केला.

स्वाध्याय - वर्गमूळ तक्याचा उपयोग करुन खालील संख्याचे वर्गमूळ काढा.

1) 42 2) 98 3) 1000 4) 200 5) 162

उदा. एका चौरसाचे क्षेत्रफळ 88 चौसेमी असल्यास त्याच्या बाजूची लांबी काढा.

रीत	स्पष्टीकरण
चौरसाचे क्षेत्र = 88 चौसेमी चौ. क्षेत्र = $(\text{बाजू})^2$ $88 = (\text{बाजू})^2$ म्हणून बाजू $\sqrt{88}$ म्हणून बाजू = 9.381cm.	1. दिलेल्या किंमती लिहल्या. 2. सुत्र लिहिले 3. किंमती लिहून वर्गमूळ घेतलं. 4. वर्गमूळ तक्याचा उपयोग करुन 88 चे वर्गमूळ काढलें.

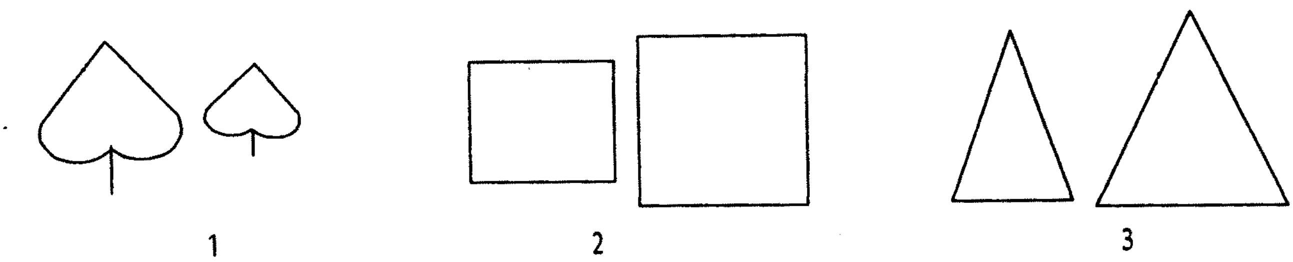
स्वाध्याय -: 1. एका काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन करणा-या बाजू 8सेमी व 9 सेमी आहेत. तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

2. □ PQRS चे क्षेत्र = 62 चौसेमी आहे. तर त्याच्या बाजूची लांबी काढा.

प्रकरण 9

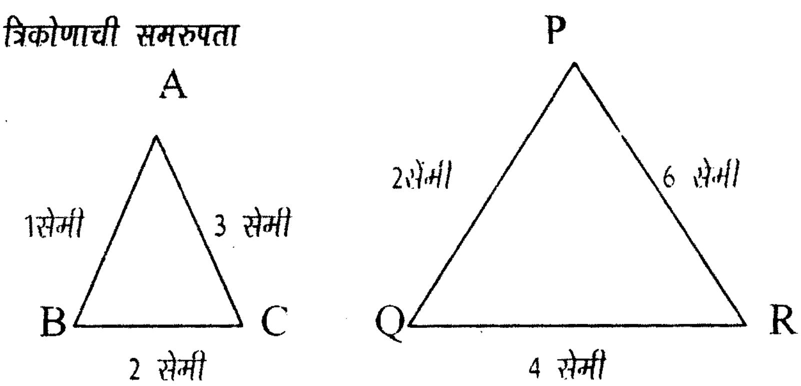
समरुपता

खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



वरील आकृत्यांचे निरिक्षण केले असता, तिन्ही जोडयामधील आकृत्या दिसायला सारख्याच आहेत. परंतू आकार लहान मोठे आहेत. म्हणून अशा आकृत्यांना समरुप आकृत्या असे म्हणतात.

त्रिकोणाची समरुपता



वरील आकृती मधील ΔABC , ΔPQR हया समरुप आकृत्या आहेत. समरुपतेसाठी ~ या चिन्हाचा उपयोग केला जातो.

म्हणून $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ असे लिहतात.

टीप -: दोन त्रिकोण समरुप असतील संगत बाजू प्रमाणात असतात.

म्हणून जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ तर

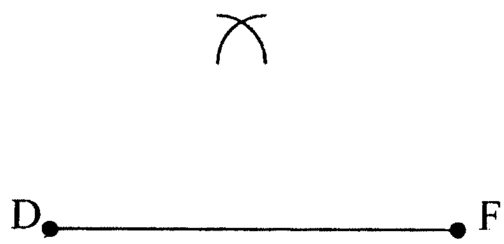
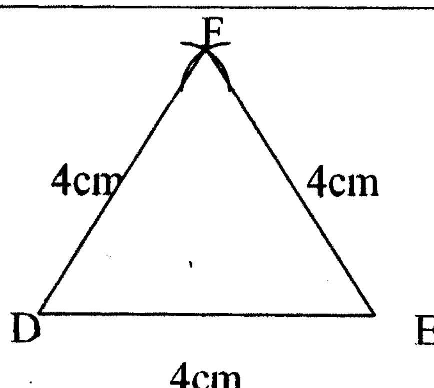
म्हणून $\frac{l(AB)}{l(PQ)} = \frac{l(BC)}{l(QR)} = \frac{l(AC)}{l(PR)}$

दिलेल्या त्रिकोणाचा समरुप त्रिकोण काढणे.

उदा. ΔABC ची प्रत्येक बाजू 2 सेमी लांबीची आहे.

ΔABC , ΔDEF यांच्या संगत बाजूचे गुणोत्तर 1: 2 आहे. तर ΔDEF काढा.

रीत	स्पष्टीकरण
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	समरुपतेचे चिन्ह वापरुन त्रिकोण लिहले.
$\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)} = \frac{1}{2}$	समरुपतेची व्याख्या वापरुन बाजू प्रमाणात लिहल्या.

$\frac{2}{l(DE)} = \frac{2}{l(EF)} = \frac{2}{l(DE)} = \frac{1}{2}$ म्हणून $\frac{2}{l(DE)} = \frac{1}{2}$	ΔABC , l(AB) = l(BC) = l (AC) = 2 प्रत्येक गुणोत्तर $= \frac{1}{2}$
म्हणून l(DE) = 4cm.	तिरकस गुणाकार केला.
म्हणून l(EF)= 4cm. l (DF) = 4cm.	वरील पध्दतीने EF व DF ची किंमत काढली.
	पट्टीच्या सहायाने l(DF) = 4 सेमी लांबीचा काढला.
	कंपासात 4सेमी अंतर घेवून विंदू **D** व **F** पासून वरच्या वाजूस एकमेकांना छेदणारे दोन कंस काढले. छेदन बिंदूला F नाव दिले.
	DF , EF जोडला. विचारलेल्या मापाचा ΔDEFमिळाला.

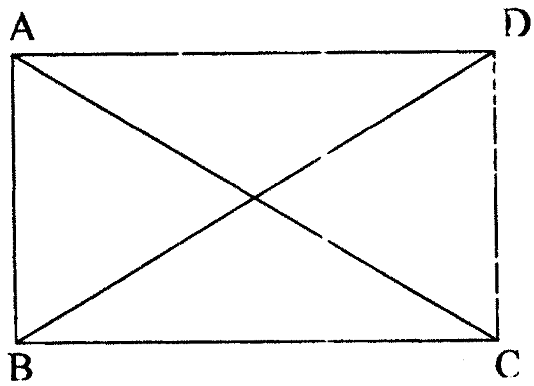
स्वाध्याय -:

1. ΔPQR मध्ये l(PQ) = 4.5 cm. , l(QR) = 6cm. l(PR) = 4.5 cm., ΔPQR , ΔLMN यांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर 3 : 2 आहे तर Δlmn काढा.
2. ΔABCमध्ये l(AB) = 8 cm., l (BC) = 6cm., l(AC) = 10cm., ΔABC, व ΔPQR यांच्या संगत बाजू 2: 1 असल्यास ΔPQRकाढा.

प्रकरण 10

चौकोन रचना

चौकोन -:



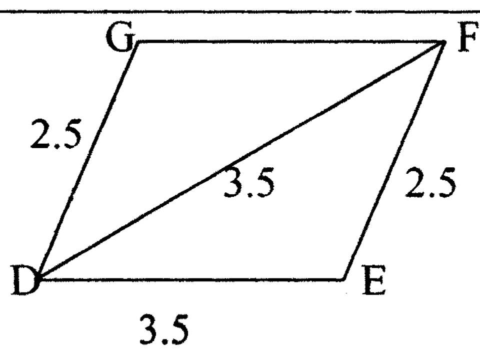
वरील आकृतीचे निरीक्षण केले. असता आपणास खालील घटक दिसतील.

1. बाजू - बाजू AB, बाजू BC, बाजू CD, बाजू AD
2. कोन -< A, <B, <C ,<D
3. कर्ण - कर्ण AC व कर्ण BD

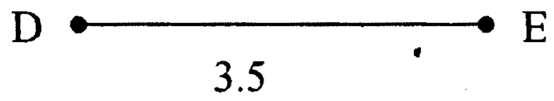
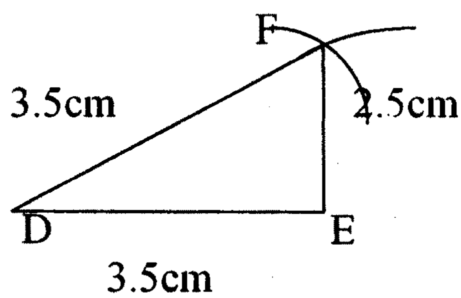
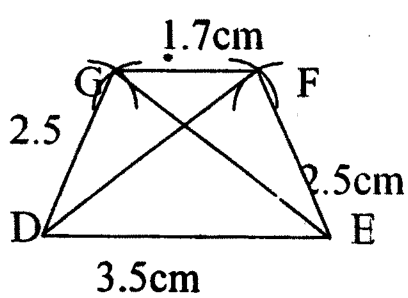
चौकोन एकूण घटक = 4 बाजू + 4कोन + 2 कर्ण = 10 घटक

टीप -: चौकोनाच्या एकूण 10 घटकापैकी कोणतेही 5 घटक असतील तर चौकोन रचना करता येते.
या प्रकरणात एकूण चार प्रकारच्या रचनांचा अभ्यास आपण करणार आहोत.
उदा. 1) पुढील मापावरुन □ DEFG काढा.

l(DE) = 3.5 cm. , l(EF) = 2.5cm., l(FG) = 1.7 cm,
l(DG) = 2.5 cm. l (DF) = 3.5 cm.



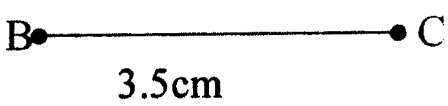
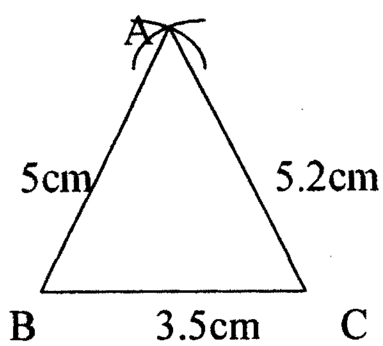
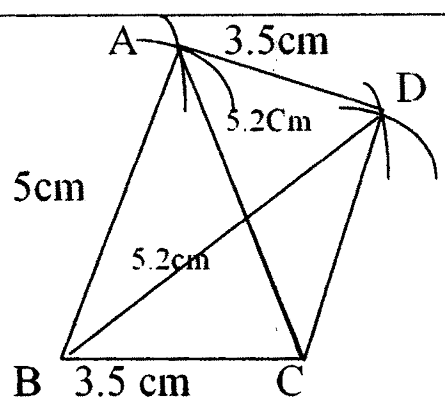
प्रथम दिलेल्या मापावरुन कच्ची आकृती काढली.

	पाया = DE = 3.5 सेमी काढला.
	l (DF) = 3.5cm., l(EF) =2.3 वरील अंतरावरील बिंदू F निश्चित केला व DE,EF जोडले.
	l(FG) = 1.7 cm., l(DG) = 2.5 cm. अंतरावरील बिंदू G निश्चित केला. FG, DG जोडला. म्हणून दिलेल्या मापाचा □ DEFG मिळाला.

स्वाध्याय -: 1) ज्याची प्रत्येक बाजू 3सेमी आहे व कर्ण PR = 3.5 सेमी आहे. असा समभूज चौ. PQRS काढा.

2) पुढील मापावरुन □ABCD काढा.
l(AB) = 4 , l(BC) = 3.5cm. , l(CD) = 4.5 cm., l(DA) = 3cm., l(BD) = 5cm.,

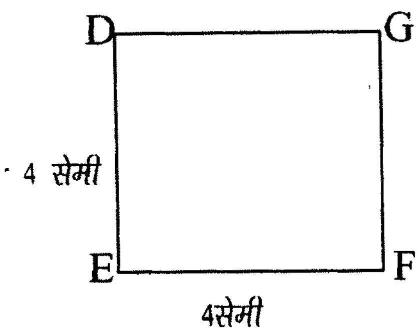
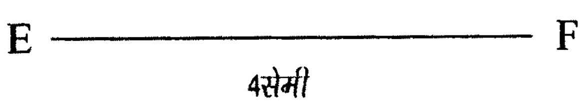
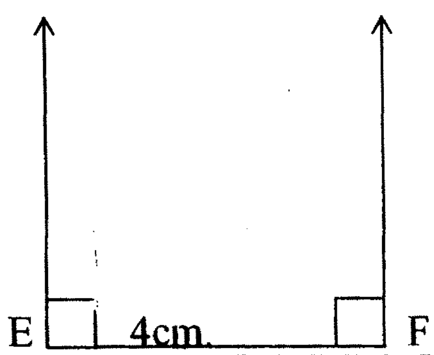
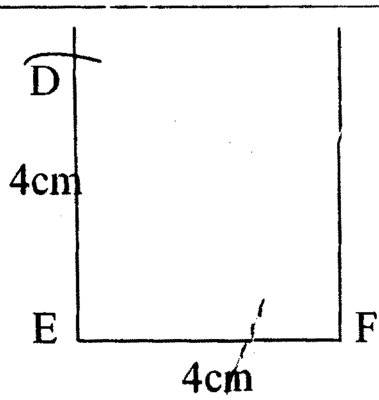
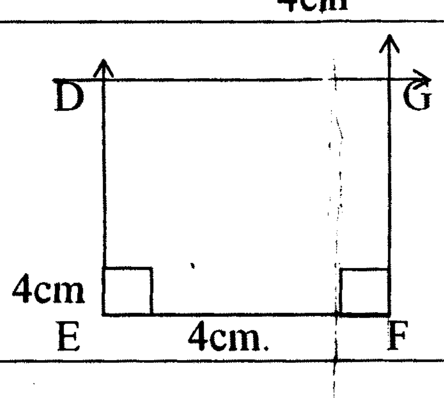
रचना -: तीन बाजू व दोन कर्ण दिले असता चौकोन काढणे.
उदा. □ABCD असा काढा की l(AD) = l(BC) = 3.5cm., l(AB) =5cm.,
l(AC)= l(BD) = 5.2 cm.,

रीत	स्पष्टीकरण
	पाया = BC = 3.5cm. सेमी काढला.
	AB = 5cm. , AC = 5.2 cm., अंतरावरील बिंदू A निश्चित केला. व AB , AC जोडला.
	l (BD) = 5.2 cm, l(AD) = 3.5cm. अंतरावरील बिंदू D निश्चित केला. AD, AC जोडला. □ ABCD दिलेल्या मापाचा मिळाला.
स्वाध्याय : □ STRV असा काढा की l(ST) = 5.5cm, l(TR) = 4.5cm, l(TV) = 8cm. 2. □ PQRS असा काढा की l(PQ) = l(PR) = l(QR) = (QS) = 5.1 cm.,	l(RV) = 5.5cm, l(SR) = 6cm, l(RS) = 4cm. l(QR) = 3.2cm.

रचना क. 3 -: दोन संलग्न बाजू व तीन संलग्न कोन कोन दिले असता चौकोन काढणे.

संगत बाजू : लगतच्या बाजू किंवा जवळच्या बाजू

उदा. □ DEFG , l(DE) = l(EF) = 4cm. m< d = m <e = m< f = 90^0

रीत	स्पष्टीकरण
	प्रथम दिलेल्या मापांची कच्ची आकृती काढली.
	पाया EF = 4 सेमी लांबीचा काढला.
	m< E = 90^0 , m< F = 90^0 मापाचे कोन काढले.
	l(DE) = 4 cm. अंतरावरील बिंदू D निश्चित केला.
	m< D = 90^0 , काढला व GD जोडला. = □DEFG दिलेल्या मापाचा चौकोन मिळाला.

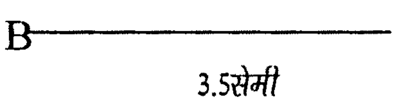
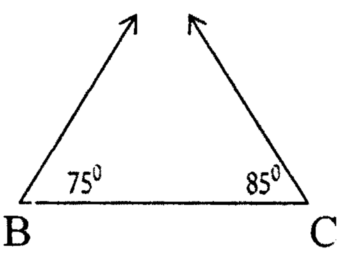
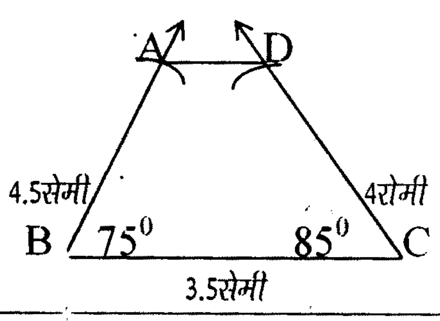
स्वाध्याय -:

1) □ LMNO , l(LM) = 4.8cm. l(MH) = 3.8cm. $m< M = 100^0$,$m< N = 90^0$,
   $m< O = 80^0$, □LMNO काढा.
2) □ PQRS मध्ये l (RS) = 5.6cm , l (PS) = 4cm., $m< R= 65^0$, $m< S = 85^0$, $m< P = 90^0$, □ PQRS काढा.

रचना 4-: तीन बाजू व दोन समाविष्ट कोन दिले असता चौकोन काढणे

उदा. □ ABCD असा काढा की l(AB) = 4.5cm.., l(BC) = 3.5cm., l(CD) = cm. , $m< B = 75^0$, $m < C = 85^0$

□ ABCD च्या दिलेल्या मापावरुन कच्ची आकृती काढली.

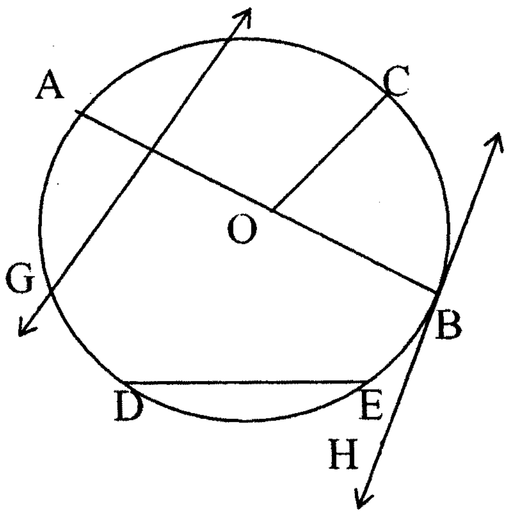
<table>
<tr><td>
</td><td>पाया = BC= 3.5 cm.लांबीचा काढला.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$m< B =75^0$, $m < C = 85^0$
मापाचे कोन काढले.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>l(AB) = 4.5 cm, l(CD) = 4 cm.
अंतरावरील बिंदू A व बिंदू D निश्चित केले. व AD जोडला.
म्हणून □ ABCD हा दिलेला मापांचा चौकोन मिळला.</td></tr>
</table>

स्वाध्याय

1) □ GHIJ मध्ये l(GH) = 5.8 cm., l(HI) = 4.5cm.,
   l(GJ) = 4.5cm., $m< G= 75^0$, $m< H = 105^0$, □ GHIJ काढा.
2) □ PQRS : l(PQ) = l(QR) = l(PS)= 5cm. , $m < Q = 120^0$, $m < R = 60^0$

प्रकरण 11

वर्तुळ - स्पर्शिका



वर्तुळ-: एका स्थिर बिंदूपासून समान अंतरावर असणा-या बिंदूच्या संचास वर्तुळ म्हणतात. वर्तुळाचे भाग खालील प्रमाणे आहेत.

1. केंद्र - स्थिर बिंदूस केंद्र म्हणतात

म्हणून O हा केंद्र आहे.

2 त्रिज्या -: केंद्र व वर्तुळावरील कोणताही एक बिंदू यांना जोडणा-या रेषाखंडास त्रिज्या म्हणतात.

म्हणून रेख OC = रेख OA = रेख OB = त्रिज्या आहे.

3. व्यास -: केंद्रातून जाणा-या रेषाखंडास व्यास म्हणतात.

म्हणून रेख AB = व्यास आहे.

4. जीवा -: वर्तुळावरील कोणतेही दोन बिंदू जोडणा-या रेषाखंडास जीवा म्हणतात.

म्हणून रेख AB व रेख DE हया जीवा आहेत.

5. वृत्तछेदीका -: वर्तुळाला कोणत्याही दोन भिन्न बिंदूला छेदणा-या रेषेला वर्तुळाची वृत्त छेदीका म्हणतात.

म्हणून रेषा FG ही वर्तुळाची वृत्तछेदीका आहे.

6) स्पर्शिका -: वर्तुळाला एक आणि एकाच बिंदूत छेदणा-या रेषेला वर्तुळाची स्पर्शिका असे म्हणतात.

रेषा BH वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. व बिंदू B हा स्पर्शबिंदू आहे.

लक्षात ठेवा -1. केंद्र हा व्यासाचा मध्यबिंदू असतो.

2. त्रिज्या व्यासाच्या निम्मी असते.

3. व्यास त्रिज्येच्या दुप्पट असतो.

4. सर्व त्रिज्या व व्यास एकरुप असतात,

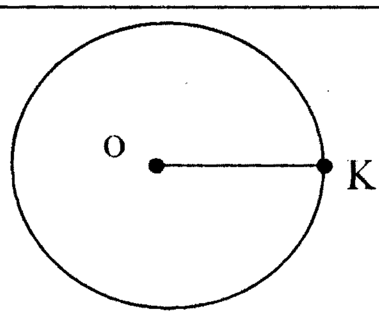
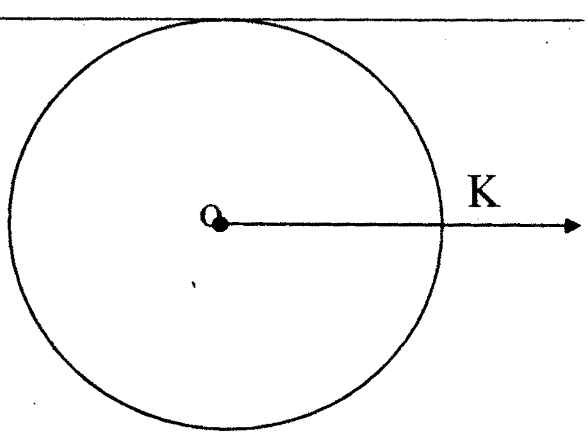
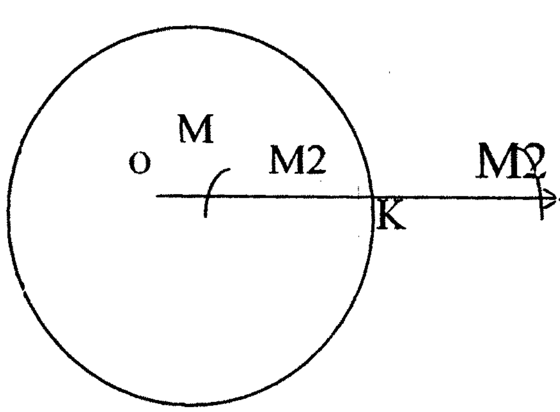
5. व्यास ही सर्वात मोठी जीवा असते.

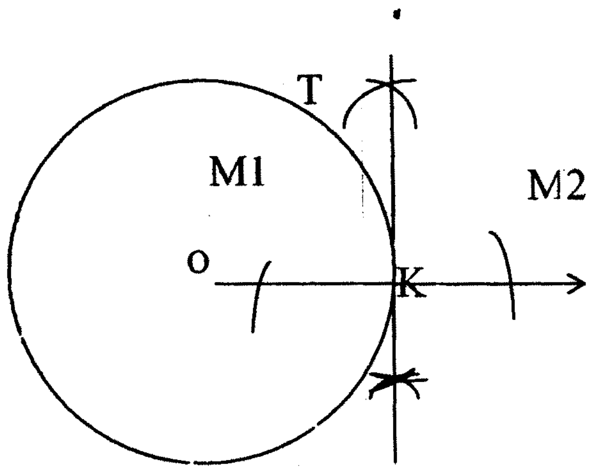
6. स्पर्शिका ही त्रिजेला लंब असते.

रचना 1 -:

वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढणे

उदा. - 2.5 सेमी त्रिजेचे वर्तुळ काढा. वर्तुळावर T बिंदू घ्या वर्तुळास TK ही स्पर्शिका काढा.

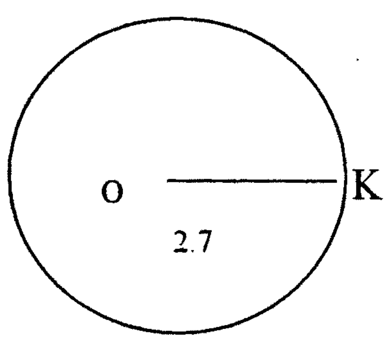
रीत	स्पष्टीकरण
	त्रिज्या OK = 2.5 सेमी चे वर्तुळ काढले. व वर्तुळावर K हा बिंदू घेतला.
	किरण OK काढला.
	कंपासाचे लोखंडी टोक K वर ठेवून M1,M2 दोन कंस काढले.



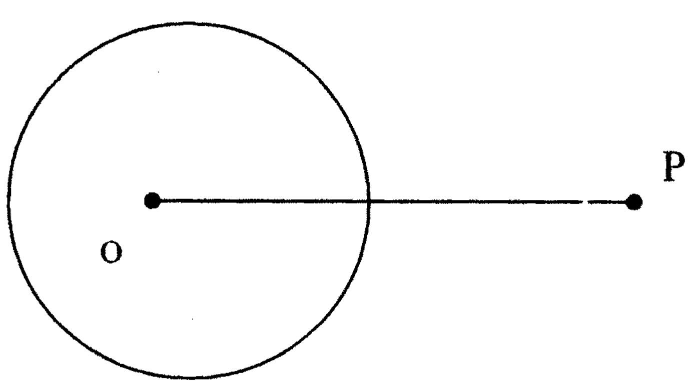
स्वाध्याय 1. सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा वर्तुळावर P बिंदू घ्या व P मधून वर्तुळास स्पर्शिका काढा.

M1 , M2, हा रेषाखंड दुभागावर T बिंदु घेतला. म्हणून रेषा KT ही वर्तुळाची स्पर्शिका मिळाली.

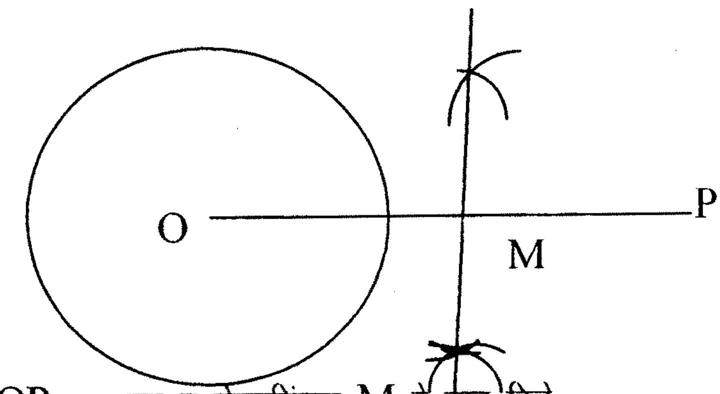
रचना-: वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.उदा.- 3.7 सेमी त्रिज्या असणारे वर्तुळ काढा. केंद्रापासून 7सेमी अंतवरील P या बिंदूतून स्पर्शिका काढा.
रीत -



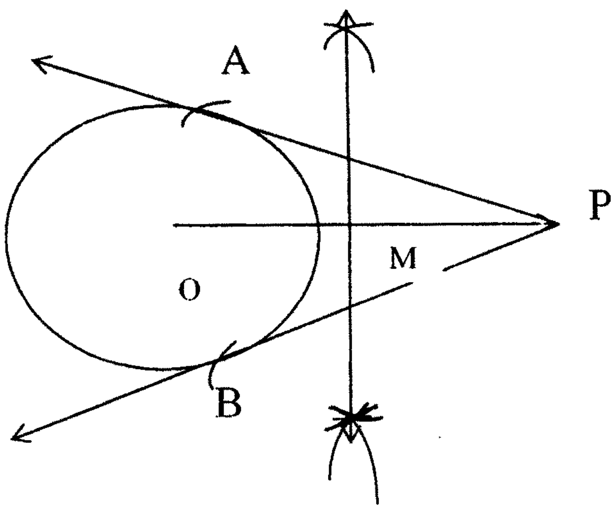
स्पष्टीकरण -: त्रिज्या 2.7 सेमी चे वर्तुळ काढून O हा केंद्र घेतला.



स्पष्टीकरण -: केंद्रांपासून 7सेमी अंतरावर बिंदू P घेतला.



स्पष्टीकरण -: रेख OP दुभागला व छेदनबिंदूला M हे नाव दिले.



स्पष्टीकरण -: केंद्र M घेवून व त्रिज्या = OM घेवून एक वर्तुळ काढले. दोन्ही वर्तुळ ज्या बिंदूत छेदतात त्यांना

A व B हे नाव देवून PA व PB ह्या दोन स्पर्शिका काढल्या.

स्वाध्याय -:

1. P = केंद्र व त्रिज्या 3सेमी असलेले एक वर्तुळ काढा.
2. PT = 8 सेमी. घेवून, बिंदु T मधून वर्तुळास स्पर्शिका काढा.

प्रकरण 12

चौकोनाचे क्षेत्रफळ

या प्रकरणामध्ये चौकोनाचे एक कर्ण काढून त्याचे त्रिकोणात विभाजन करावे त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाची बेरीज म्हणजेच दिलेल्या चौकोणाचे क्षेत्रफळ मिळते. त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळामध्ये ज्या सूत्रांचा व पध्दतीचा वापर केला. तीच पध्दत या ठिकाणी वापरणार आहोत.

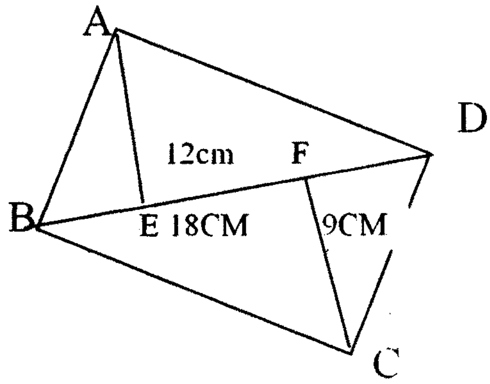
1. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ x पाया x उंची चौ. एकक

2. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

वरील सूत्राचाच उपयोग करुन चौकोनांचे क्षेत्रफळ काढले जाते.

पाया समान असलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ चौकोनाचे क्षेत्रफळ

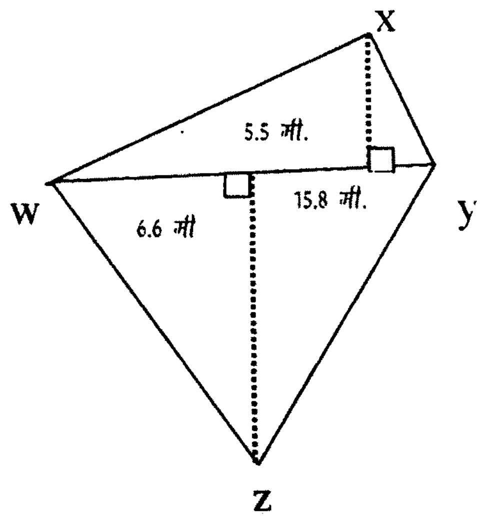
चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ x कर्ण x उंचीची बेरीज



आकृती मध्ये रेखाए BD व रेख CFरेख BD जर l(AE) = 12cm. l(BD) = 18cm., l (CE) = 9cm. ,□ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

रीत	स्पष्टीकरण
□ ABCD चे क्षेत्रफळ = 1/2 x कर्ण x उंचीची बेरीज	पाया कर्ण समान आहे.
1/2 x BD x (AF+ FC) = 1/2 x 18 x (12 + 9)	किंमती लिहिल्या.
= 1/2 x 18 x 21	कंसातील बेरीज केली.
= 1/2 x 18 x 21 = 9 x 21 = 189 चौ. सेमी.	2 ने 18 ला भागले व 9 व 21 यांचा गुणाकार केला.

स्वाध्याय-: 1. खाली एक भूखंडाचा नकाशा दिला आहे त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

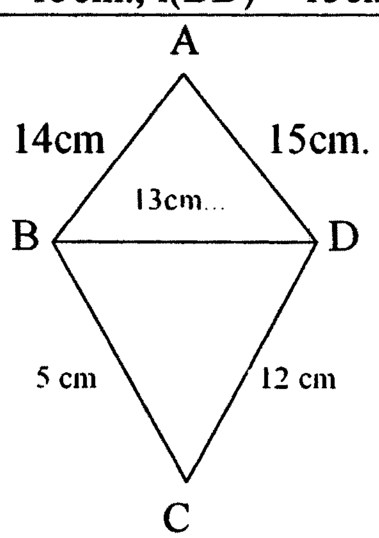


2. □ ABCD चा कर्ण BD असून शिरोबिंदू A व C पासून त्या कर्णावर अनुक्रमे रेख AE व रेख लंब काढले आहेत. जर l(BD) = 10.4 cm. , l(AE) = 6.2cm., l(CF) = 4.8cm., □ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

2. चौकोनाच्या चार बाजू व कर्ण दिला असता क्षेत्रफळ काढणे. -

या प्रकारच्या उदाहरणात जे त्रिकोण मिळतात. त्यामध्ये हिरोचे सूत्र वापरुन क्षेत्रफळ काढले जाते. याची पध्दत मागील प्रकरणात पाहीली आहे.

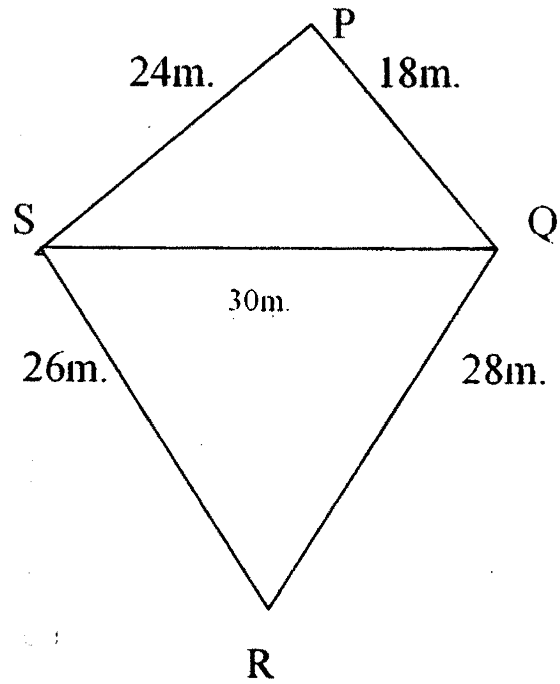
उदा □ ABCD , l(AB) = 14cm. , l(BC) = 5cm., l(CP) = 12cm., l(DA)= 15cm., l(BD) = 13cm., तर □ ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>उदा. दिलेल्या माहितीवरुन आकृती काढली.</td>
</tr>
<tr>
<td>A (□ ABCD) = A (ΔADB) + A (BCD)
= ΔABCचे क्षेत्रफळ काढू.
a = 14, b= 13, c = 15
= $s = \frac{a+b+c}{2}$</td>
<td>सुत्र तयार केले.
हिरोच्या सुत्राने किंमती काढण्यासाठी a, b, c च्या किंमती लिहून S ची किंमत काढली.</td>
</tr>
</table>

$= \frac{14 + 13 + 15}{2}$ $= \frac{42}{2}$ = S = 21CM.	
$A(\Delta ADB) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \sqrt{21(21-14)(21-13)(21-15)}$ $= \sqrt{21 \times 7 \times 8 \times 6}$ $= \sqrt{7 \times 7 \times 3 \times 4 \times 4}$	शिरोचे सुत्र लिहले. किंमती लिहल्या फोड करुन गट तयार केले.
= 7 x 3 x4 = 7 x 12 = 84cm. म्हणून = A (ΔADB) = 84 चौ cm. .... (2)	प्रत्येक गटातून एक संख्या घेवून गुणाकार केला.
रीत	**स्पष्टीकरण**
वरील प्रमाणे Δ BDC चे क्षेत्रफळ काढू. ΔBCD मध्ये a = 13, b = 5 , c = 12 $s = \frac{a + b + c}{2}$ $= \frac{13 + 5 + 12}{2}$ $= \frac{30}{2}$ s = 15cm.	अर्धपरिमिती काढण्यासाठी a, b, c च्या किंमती लिहल्या व s ची किंमत लिहली.
म्हणून $A(\Delta BCD) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \sqrt{15(15-13)(15-5)(15-12)}$ $= \sqrt{15 \times 2 \times 10 \times 3}$ $= \sqrt{5 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 3}$ $= \sqrt{5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2}$	शिरोचे सुत्र लिहून किंमती लिहल्या. फोड करुन समान संख्याच्या जोडया तयार केल्या

= 5 x 3 x 2 = 30cm. = (Δ BCD) = 30 cm. A Δ (BCD) = 30cm. .... (3)	प्रत्येक गटातून एक संख्या घेवून गुणाकार केला.
A (□ ABCD) = 84 + 30 A (□ ABCD) = 114 cm.	समीकरण 1 व 2 , 3 वरुन □ ABCD चे क्षेत्रफळ काढले.

स्वाध्याय -: 1. खाली एक भूखंडाचा नकाशा दिला आहे. त्यातील दिलेल्या माहितीवरुन त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



3. विविध सुत्रांचा उपयोग करुन क्षेत्रफळ काढणे.

खालील सुत्रांचा वापर केला जातो.

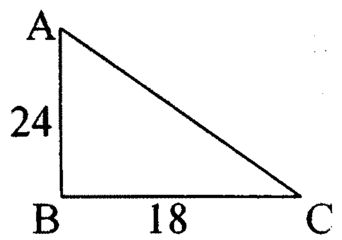
1. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ x पाया x उंची

2. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

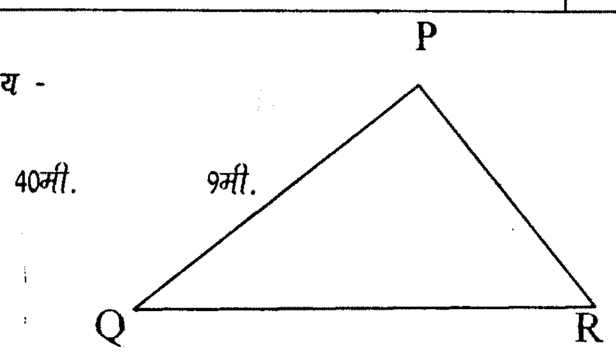
3. पायथागोरसचे प्रमेय -:

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{बाजू})^2 + (\text{बाजू})^2$$ काटकोन त्रिकोणात

पायथागोरसचे प्रमेय वापरुन एखादया बाजूची लांबी काढावी लागते. त्यासाठी एखादे उदा. पाहू उदा. काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $< b = 90^0$, AB = 24 m. ,BC = 18m. , AC ची किंमत काढा.

	स्पष्टीकरण
	काटकोन त्रिकोण ABC काढला.
म्हणून $AC^2 = AB^2 + BC^2$	पायथागोरसचे प्रमेय लिहले.
$= (24)^2 + (18)^2$ = 576 + 324 = 900	किंमती लिहून वर्ग केले. व बेरीज केली.
AC= 30cm.	वर्गमूळ घेतले.

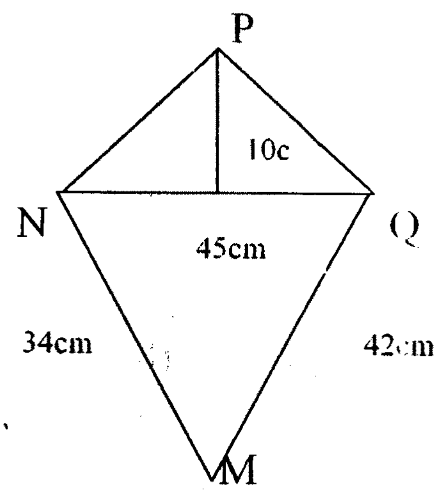
स्वाध्याय -



1. आकृतीत दिलेल्या माहितीवरुन l(QR) किंमती काढा.

2. एका काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणा-या बाजू 5सेमी . व 12 सेमी आहेत तर त्याचा कर्ण काढा.

उदा. - खालील आकृतीत दिलेल्या माहीतीवरुन □ PQMN चे क्षेत्रफळ काढा.

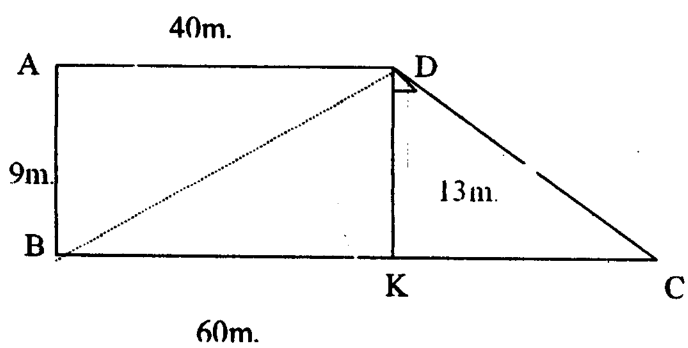


A(□ PQMN) = A (ΔPNQ) + A(ΔNMQ) .... (1)	आकृतीवरुन सुत्र तयार केले.
ΔPNQ मध्ये A (ΔPNQ) = $\frac{1}{2}$ x NQ x PL	$\frac{1}{2}$ x पाया X उंची या सुत्राचा उपयोग केला.
= $\frac{1}{2}$ x 45 x 10 = 45 x 5 = 225 म्हणून A($\angle$PNQ) 225 चौसेमी. .... (2)	किंमती लिहून सोपे रुप दिले.
Δ NMQ मध्ये a = 39 cm., b = 42 cm , c = 45 cm. म्हणून s = $\frac{s + b + c}{2}$ = $\frac{39 + 42 + 45}{2}$ = $\frac{126}{2}$ S = 63 cm.	त्रिकोणाच्या तीन बाजू आहेत. म्हणून s ची किंमत काढली.
म्हणून Δ NMQ चे क्षेत्रफळ = $\sqrt{s (s - a) (s-b) (s-c)}$ = $\sqrt{63 (63 - 39) (63- 42) (63 - 45)}$	शिरोचे सुत्र वापरले व किंमती लिहल्या.
= $\sqrt{63 \times 24 \times 21 \times 18}$ = $\sqrt{9 \times 7 \times 7 \times 3 \times 8 \times 3 \times 9 \times 2}$ = $\sqrt{9 \times 9 \times 7 \times 7 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4}$	वजाबाकी केली व गट पाडले.

रीत	स्पष्टीकरण
= 9x 7x 3x 4	प्रत्येक गटातून एकसंख्या घेवून गुणाकार केला.
= 63 x 12	
= 756 cm.	
म्हणून A(ΔMNQ) = 756 cm. .... (3)	
म्हणून A (□PQMN) = 225 + 756 = 981 cm.	1 व 2 , 3 वरुन ....

स्वाध्याय -: 1. □ PQRS मध्ये l(PQ) =18cm., l(QR) = 24 m. ,l(RS) = 20m., l(SP) = 28 m. <PQR = 90^0 आहे. तर □ PQRS चे क्षेत्रफळ किती.

. खाली एक भुखंडाचा नकाशा दिला आहे. त्यामधील मापे लक्षात घ्या आणि भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.



प्रकरण 13

नित्य संमीकरणे - अवयव

वयव-: जर a आणि b या कोणत्याही दोन संख्या असतील आणि जर b ने a निःशेष भाग जात असेल तर b ला a या अवयव म्हणतात.

वर्ग त्रिपदीचे अवयव -: ज्या त्रिपदीमधील चलाचा घांताक जास्तीत जास्त दोन असेल तर त्यास त्रिपदी असे म्हणतात.

उदा. 2 . $2x^2 + 3x + 1$

3. $y^2 + 2y + 1$

यम -: वर्गत्रिपदीचे अवयव काढण्यासाठी मधल्या पदाची फोड करणे आवश्यक आसते.

उदा. जर $x^2 + bx + C$ चे अवयव काढण्याबाबत

b ची फोड करणे आवश्यक आहे.

b ची फोड करणे साठी (स्थिरांकाची) मदत दयावी लागेल.

चिन्हाचे नियम -:

1. बेरीज किंवा वताबाकी करताना

1. समान चिन्हे (+, + , -, -) असतील तर बेरीज करुन मोठया संख्येचे चिन्ह लिहावे.

उदा. : a) 2+3 = 5

b) - 2- 3 = -5

2. भिन्न चिन्हे असतील वजाबाकी करुन मोठया संख्येचे चिन्ह दयावे.

उदा. 5- 3 = 2

3- 5 = -2

उदा. अशा दोन संख्या शोधा की गुणाकार 6 व बेरीज 5 आहे.

रीत	स्पष्टीकरण
6 = 2x3	वरील दोन संख्या घ्या जोडीतील बेरजा केल्या.
= 6x1	1. 2+3 = 5
6 = 2x3	2. 6+1 = 7
त्या संख्या = 2, 3	म्हणून 5 बेरीज येणारी जोडी निवडली.

- 2 गुणाकार 12 बेरीज = - 7

रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून 12 = 3 x 4 म्हणून 12 = 6 x 2 = 12 x 1	+ 12 गुणाकार देणा-या दोन संख्या शोधल्या.
12 = (- 3) x (-4) म्हणून = - 3 , - 4	धन गुणाकार नेहमी (+ , +) किंवा(-, -) या संख्याचा असते. म्हणून - 3 + (- 4) = - 7

स्वाध्याय 1. गुणाकार = 9 बेरीज = 10

2. गुणाकार = - 35 बेरीज = -2

3. गुणाकार = 100 बेरीज = - 25

* मधल्या पदाचे दोन भाग पाडून अवयव पाडणे.

उदा. 1. $x^2 + 7x + 6$

म्हणून $x^2 + 7x + 6$ म्हणून = +6 +6 + 1	स्थिरांकाची फोड केली व चिन्हे निश्चित केली.
म्हणून $x^2 + 7x + 6 = x^2 + 6x + x + 6$ $= x^2 + 6x + x + 6$ $= x(x+6) + 1(x+6)$ $= (x+6)(x+1)$ म्हणून $x^2 + 7x + 6 = (x+6)(x+1)$	मधल्या पदाची फोड केली दोन - दोनचे गट केले. समाईक काढले. कंस सामाईक काढला.
$x^2 - 6x + 5$ म्हणून $x^2 - 6x + 5$ +5 -5 -1 म्हणून $x^2 - 6x + 5 = x^2 - 5x - x + 5$ $= x(x-5) - 1(x-5)$ $= (x-5)(x-1)$ म्हणून $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$	स्थिरांकाची फोड केली. व चिन्हे निश्चित केली मधल्या पदाची फोड केली गट पाडून सामाईक घेतले कंस सामाईक घेतला.

स्वाध्याय -: 1. $x^2 - 20m + 96$

2. $x^2 + 7x + 30$

3. $x^2 - 8x + 7$

* धन राशीचे अवयव

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

a - पहिले पद

b- दुसरे पद

शब्दात खालील पध्दतीने सूत्र लिहले जाते.

1. (पहीले पद + दुसरे पद $)^3$ = (पहिले पद $)^3$ + 3 (पहिले पद $)^2$ x (दुसरे पद)+3 (दुसरे पद$)^2$ +(दुसरे पद$)^3$

2.(पहिले पद - दुसरे पद $)^3$ = (पहिले पद $)^3$ - 3 (पहिले पद $)^2$ x (दुसरे पद) +3 (पहीले :द) X (दुसरे पद $)^2$ - (दुसरे पद$)^3$

वरील सुत्र.चा उपयोग करुन अवयद पाडू

उदा. 1. अवयव पाडा $x^3 + x^2 + 27x + 27$

रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून $x^2 + 9x^2 + 27x + 27$ $= (x)^3 + 9x^2 + 27x + (3)^3$	स्पष्टीकरण राशीमधील घनाची पदे शोधली.
$= (x+3)^3$	त्यांची घनमूळे काढून व घनाच्या पदाचे चिन्ह लिहून घन लिहला.

$= 216^3 - 125^3 - 540+^2 1 + 450 + 4^2$

रीत | स्पष्टीकरण

$= (6p)^3 - (5q)^3\ 540pq^2 + 450pq^2$

$= (6p - 5q)^3$ — घनाचे पद शोधले कंसाचा घन लिहला.

ाध्याय -: अवयव पाडा

1. $x^2 - 3x^2 + 3x - 1$

2. $125a^3$ $150a^2b + 60ab^2$
$+8b^3$

दोन घनांच्या बेरजेचे व वजाबाकीचे अवयव

1. दोन घनांच्या बेरजेचे अवयव

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

a - पहीले पद

b - दूसरे पद

$($पहीले पद$)^3 + ($दूसरे पद$)^3 = ($पहीले पद + दूसरे पद$)$
$[($पहीले पद$)^2 - ($पहिले पद$)($दूसरे पद$) + ($दूसरे पद$)^2]$

2. दोन घनांच्या बेरजेचे अवयव -

$(a^2 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$($पहिले पद$)^3 - ($दूसरे पद$)^3 = ($पहिले पद - दूसरे पद$)$
$[($पहिले पद$)^2 + ($पहिले पद$)($दूसरे पद$) + ($दूसरे पद$)^2]$

वरील सूत्राचा उपयोग करुन खालील राशींचे अवयव पाडा.

उदा. 1. $a^2 + 27$

रीत	स्पष्टीकरण
$^3 + 27 = (a^2) + (3^3)$ $(a+3)(a^2 - a\text{-}3 + 3^2)$ $(a+3)(a^2 - 3a + 9)$ णून $a^3 + 27 = (a+3)(a^2 - b\ 3a + 9)$	दोन्ही पदे घाताच्या स्वरुपात लिहली. $= a^3 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ या सुत्रात बसविले. वर्ग व गुणाकार केला.
2. $27p^3 - 8q^3$ रीत $7p^3 - 8q^{-2} = (3p)^3 - (2q)^3$ $= (3p - 2q)[(3p)^2 + (3p)(2a) +$ $a)^2]$ $(3p - 2a)(9p^2 + 6pq^{-4} + 4a^2)$	 दोन्ही पदे घनाच्या रुपात लिहली. $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^3)$ या सुत्रात बसविले. वर्ग व गुणाकार केला.
3. $54p^3 - 162^3$	

रीत	स्पष्टीकरण
$54p^3 - 16q^3$ $= 2[(3p^3 - 8q)^3$	54, व 16 या दोन घन संख्या नाहीत. म्हणून त्यातून 2 सामाईक घेतले. सामाईक काढुन आलेल्या संख्या घनाच्या रुपात लिहल्या.
$= 2[(3p)^3 - (2q)^3]$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ हे सुत्र वापरले.
$= 2[3p - 2q][(3p)^2 + 3p\,2q + (2q)^2$ म्हणून $54p^3 - 16q^3 = 2(3p - 2q)(9p^2 + 6pq + 4q^2)$	कंसातील वर्ग व गुणाकार केला.

स्वाध्याय -: अवयव पाडा

1. $64a^3 + b^3$ 2. $x^2 - 343y^3$ 3. $512 + p^3$

बैजीक राशींना सरळ रुप देणे.

खालील नित्यसमिकरणाचा उपयोग करुन सरळ रुप देवू

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3\ a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

उदा. सोपे रुप दया $(a+b)^3 - (a-b)^3$

रीत	स्पष्टीकरण
$(a+b)^3 - (a-b)^3$ $= a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$	$(a+b)^3, (a-b)^3$ हे सुत्र वापरले.
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^2$	कंस सोडवले.
$= 3a^2b + 3a^2b + b^3 + b^3$ $= 6a^2b + 2b^2$	सजातीय पदांची बेरीज केली.

2. $\frac{1}{(a-b)} x (a^2 - b^2)$

रीत	स्पष्टीकरण
$\frac{1}{(a-b)} x (a^2 - b^2)$ $\frac{1}{(a-b)} x (a+ b) (a-b)$	$a^2 - b^2 = (a+b) (a-b)$ सुत्र वापरले.
$= a+b$ म्हणून $\frac{1}{a + b} x (a^2 - b^2) = (a+b) (a-b)$	अंशांतील व छेदातील समान संख्या घालवली.

उदा. 3

$\frac{m^2 - n^2}{m^3 - b^3} x \frac{m^2+ mn + n^2}{m^2+ 2mn+ n^{2+}}$

रीत	स्पष्टीकरण
$= \frac{m^2 - n^2}{m^3 - b^3} \frac{x m^2 + mn+ n^2}{m^2 +2 mn + 4^2}$ $= \frac{(m+n) (m-n)}{m^2 -n^2} x \frac{m^2 + mn + n^2}{m^2+ 2mn + n^2}$	$= m^2 -n^2 = (m+ n) (m-n)$ $= m^3 - n^2= (m-n) (m^2 mn+ n^2)$
$= \frac{(m+n) (m-n)}{(m-n) (m^2+mn + n^2)} x \frac{m^2+ mn + n^2}{m^2+ 2mn+ n^2}$ $\frac{(m+n) (m-n)}{(m-n) (m^2+ mn+ n^2)} x \frac{(m^2+mn + n^2)}{(m+n)^2}$ $= \frac{1}{m + n}$	$= m^2 + 2mn+ n^2 =(m+n)^2$ अंशांतील व छेदावरील समान अवयव घालवले.

स्वाध्याय - सोपे रुप दया. 1. $\frac{8a^2 - 27b^3}{4a^2 - 9b^2}$	2. $\frac{a^2 + 10a+ 21}{a^2 + ba- 7} x \frac{a^2 -1}{a+3}$
3. $(a^3+ b^3) - (a+ b)^3$	

प्रकरण 14

एकसामायिक समीकरणे

एक सामायिक समिकरणे - :

समजा- $x+y=14$, $x-y=6$ या समीकरणामध्ये

= $x=10$, $y=4$ ठेवून

म्हणून $x+y=14$

$10+4=14$

म्हणून $14=14$

= $14=14$ म्हणून डावी बाजू = उजवी बाजू

व $x-y=6$

म्हणून $10-4=6$

म्हणून $6=6$ म्हणून डावी बाजू = उजवी बाजू

म्हणून $x=10$ व $y=4$ या सोडून कोणत्याही किंमती ठेवल्या तर डावी बाजू उजवी बाजू मिळत नाही.

व्याख्या -: '' ज्या दोन समीकरणाचे एकमेव उकलीने एकाच समयी समाधान होतो. त्या एकसामायिक समीकरणे असे म्हणतात.''

एकसामायीक समीकरणे सोडवणे -:

एकसामायीक समीकरण सोडविण्यासाठी खालील नियमांचा वापर केला जातो.

1. समान पदाना समान चिन्हे (+, +) , (-, -) असतील तर त्यांची वजाबाकी करावी.
2. समान पदाना भिन्न चिन्हे असतील (+,-) असतील तर त्यांची बेरीज करावी.

उदा. 1 $x+2y=1y$, $x-2y=-3$

रीत	स्पष्टीकरण
$x+2y=17$ ---- [1] $x-2y=-3$ ---- [2]	समीकरणाना नंबर दिले.
समी .. 1 + समी 2 $x+2y)+(x-2y)=17+(-3)$	समीकरणातील 2y या समान पदांना भिन्न चिन्ह आहे. त्यांची बेरीज केली.
= $x\,2y+x-2y=17-3$ $=x+x=14$ $=2x=14$	भिन्न चिन्हाचा समाज पदे घालवली बेरीज केली.
= $x=7$	दोन्ही बाजूस 2 ने भागले

$\therefore$ 5x - 4y = 3y , 7x- 4y = 55

$\Leftarrow$ 5x - 4y =37 ------- [1] $\Leftarrow$ 7x - 4y = 55 ------[2]	समीकरणांना नंबर दिले.
समी ... 1 व समी..... 2 $\Leftarrow$ (5x-4y) - (7x- 4y) = 3y - 55	4y या समान पदांना समान पद (-,-) आहे. म्हणूंन वजाबाकी केली.
रीत	स्पष्टीकरण
म्हणून 5x - 4y - 7x + 4y = 37 - 55 = 5x - 7x = 37- 55 = - 2x = - 13 = x = 9 = 5. 9 - 4y = 37 = - 4y = 37 -45 = - 4y = 8 = y = 2 उकल = (9, 2)	कंस सोडवले भिन्न चिन्हाचे समानपद घालवले . वजाबाकी केली. -2 ने भागले. ल ची किंमती काढण्यासाठी y समी 1... मध्ये ठेवले. = x = 9 समीकरण ठेवले - 4 ने भागले.

घ्याय -: सोडवा

1] 8x + 9y = 154, 8x- 13= - 66
2] 3x + 8y = 43 , 3x -7y = 13
3] 10x - 2y = 34, 7x- 2y = 25

x + 2y = 17 मध्ये x =7 ठेवून	y ची किंमत काढण्याठी x = y समी... 1 मध्ये ठेवले.
7 + 2y = 17 = 2y = 17 -7 2y = 10	x = 7 किंमत ठेवून 2 ने भागले.
y = 5	
उकल = (7, 5)	

प्रमाणपत्र दि - 3-12-07

प्रमाणित करण्यात येते की श्री कुमार जयकर शंकर हे शिवाजी विद्यापीठाच्या एम. फिल (शिक्षणशास्त्र) या पदवीसाठी " गणिताच्या स्वयं अध्ययन संचाचे विकसन व त्याच्या परिणामकारकतेचा अभ्यास " या विषयावर संशोधन केले आहे. सदरच्या संशोधनासाठी इयत्ता 8 वीच्या गणिताच्या पुस्तकातील विभाग-1 व विभाग-2 वर स्वयंअध्ययन संच माझ्या मार्गदर्शनाखाली तयार केलेला आहे. त्यांनी तयार केलेला हा संच अचूक असून तो विद्यार्थ्यांच्या अध्ययनावर निश्चित परिणामकारक असेल.

श्री शि. श. मोहिते
(लेखक इ. १० वी बीजगणित पाठ्यपुस्तक (सुधारित अभ्यासक्रम))

निवास
.पो.कामेरी (घाटाई चौक)
ा.वाळवा, जि.सांगली.
न - ४१५४०३
ोन:(०२३४२) २७१४४०.

श्री.अशोक मारूती पाटील
एम.एस्सी.,एम.एड.
अधिव्याख्याता,
वसंत कॉलेज ऑफ एज्युकेशन
इस्लामपूर.ता.वाळवा, जि.सांगली.४१५४०९.
फोन : (०२३४२) २२०६०९

दिनांक: 26 / 12 / 2007.

प्रमाणपत्र

प्रमाणित करण्यात येते की, श्री जयकर शंकर कुंभार हे शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूरच्या एम. फिल (शिक्षणशास्त्र पदवीसाठी संशोधन करत आहेत. त्यांनी 'स्वयंअध्ययन संचाचे विकसन व त्याच्या परिणामकारकतेचा अभ्यास' (इयत्ता ४थी. हा विषय निवडला असून सदर संशोधनासाठी गणिताच्या स्वयंअध्ययन संचाचे विकसन' यासाठी त्यांनी स्वतः माझ्याकडून मार्गदर्शन घेतलेले आहे. दिलेल्या सूचनानुसार त्यांनी गणिताच्या स्वयंअध्ययन संच विकसित केला आहे. स्वयंअध्ययन संच हा विद्यार्थ्यांचे गणितातील प्राविण्य संपादनासाठी निश्चितच उपयुक्त होईल.

कळावे.

Patil
Lecturer in Education
[illegible] College of [illegible]
ISLAMPUR, 4154[illegible] (Sangli)