: प्रकरण - तिसरे :

: घातांक - अर्थ नियम व प्रक्रिया :

प्रकरण तिसरे

घातांक – अर्थ, नियम व प्रक्रिया

प्रकरण तिसरे

घातांक - अर्थ, नियम व प्रक्रिया

3:1 प्रस्तावना:-

घातांक व घातांकांचे नियम इ. चा समावेश इयत्ता पाचवी पासून दहावीपर्यंतच्या अभ्यासक्रमात केलेला आहे. गणितातील घातांक या घटकाच्या ज्ञानाचा उपयोग विद्यार्थ्यांना बहुपदी, अपूर्णांक, वर्ग समीकरणे, संख्यांचा विस्तार, संश्लेषक भागाकार इ.घटकांचे ज्ञान मिळविण्यासाठी होतो. या दृष्टीने घातांकाचा अर्थ, नियम व त्यावरील मूलभूत कौशल्याचा क्रियात्मक वापर विद्यार्थ्यांना करता आला नाही तर विद्यार्थ्यांना गणितात चांगले गुण मिळविता येत नाहीत. प्रस्तुत प्रकरणात घातांकाचा अर्थ, घातांकांचे नियम व घातांकांवरील उदाहरणे सोडविण्यासाठी लागणारी मूलभूत कौशल्य यांचा समावेश आहे.

3:2 घातांक :-

व्याख्या - 'a' ही शून्येतर वास्तव संख्या असेल व m हा धन पूर्णांक असेल तर a चा m वा घात म्हणजे a^m हया चिन्हात a हा पाया व m हा घातांक आहे.

घातांकांच्या संदर्भात a म्हणजे a^1, म्हणजेच a चा एक घात असा अर्थ घेतात.

$a^m = a \times a \times a \times \ldots \times a$ (a हा अवयव m वेळा)

a हा अवयव m वेळा घेऊन गुणाकार केल्यावर जी संख्या मिळते ती संख्या a चा m वा घात असते.

a^m च्या घाताला a^m ची किंमत म्हणतात. उदा. $3^3 = 27$ आहे. म्हणून 27 ही संख्या 3 चा घन किंवा 3 चा तिसरा घात आहे. व 27 ही संख्या 3^3 ची किंमत आहे.

अर्थ:-

संख्यांचे मूळ अवयव पाडताना एखादा अवयव अनेक वेळा येतो. उदा. $128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$ येथे 2 हा अवयव 7 वेळा आला आहे. सोयीसाठी आपण $128 = 2^7$ असे लिहितो. 2^7 च्या चिन्हात 7 ही संख्या 2 हा अवयव किती वेळा आला आहे हे दाखवितो. 2 ला पाया आणि 7 ला घातांक म्हणतात.

3:3 घातांकांचे नियम :-

3:3:1 1) पूर्णांक घातांक :-

शून्य व ऋणपूर्णांक घातांकांचे अर्थ -

a ही कोणतीही शून्येत्तर वास्तव संख्या असेल तर $a^0 = 1$, $a^1 = a^1$ आणि

m ह्या धन पूर्णांकासाठी $a^{-m} = \frac{a}{a^m}$ असा होतो.

कोणत्याही शून्येतर वास्तव संख्याचा कोणताही घात धन घातांकाचे किंवा ऋण घातांकाने लिहिता येतो.

उदा. $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5$ किंवा $3^5 = \frac{1}{3^{-5}}$ या ठिकाणी 3^5 व 3^{-5} ह्या संख्या एकमेकीच्या गुणाकार व्यस्त संख्या आहेत.

तसेच कोणत्याही शून्येतर वास्तव संख्येचा घात शून्य असेल तर त्याची किंमत नेहमीच एक येते.

उदा $(p+q)^0 = 1$ किंवा $(25)^0 = 1$

3:3:2 पूर्णांक संख्येसाठी घातांकाचे नियम:-

1) a ही शून्येतर वास्तव संख्या असेल तर m आणि n ह्या कोणत्याही दोन पूर्णांकासाठी-

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

पूर्णांकांच्या बाबतीत पाया समान असलेल्या घातांचा गुणाकार करताना पाया साधारण घेऊन घातांची बेरीज करतात.

उदा. $13^2 \times 13^3 \times 13^5 = 13^{2+3+5}$

$= 13^{10}$

2) 'a' शून्येतर वास्तव संख्या असेल आणि m व n हे पूर्णांक असतील तर

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

धन पूर्णांकांच्या बाबतीत पाया समान असलेल्या घातांचा भागाकार करताना दोन पर्यायांचा विचार करावा लागतो.

$$\frac{a^{14}}{a^{11}} = a^{14-11} = a^3$$

किंवा

$$\frac{a^{11}}{a^{14}} = \frac{1}{a^{14-11}} = \frac{1}{a^3}$$

पाया समान असलेल्या ऋण पूर्णांक घातांचा भागाकार करताना दोन पर्यायांचा विचार करावा लागत नाही. म्हणजे पूर्णांक संख्यांच्या बाबतीत $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ हा एकच नियम राहतो.

उदा.

1) $\frac{2^{-8}}{2^{15}} = 2^{-8} \times \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{2^8} \times \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{2^{8+15}}$

$= 2^{-(8+15)} = 2^{-8-15} = 2^{-23} = \frac{1}{2^{23}}$

2) $\frac{p^{-5}}{p^{-7}} = p^{-5} \times \frac{1}{p^{-7}} = \frac{1}{p^5} \times p^7 = \frac{p^7}{p^5}$

$= p^{7-5} = p^{-5-(-7)}$

3:3:3 गुणाकार किंवा भागाकाराचा घात :-

a व b या शून्येतर वास्तव संख्या असतील आणि m हा पूर्णांक असेल तर,

1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

उदा. 1) $(a \times b)^{-5} = \frac{1}{a^5 \times b^5} = \frac{1}{a^5} \times \frac{1}{b^5}$

$= a^{-5} \times b^{-5}$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

3:3:4 घाताचा घात :-

a ही शून्येतर वास्तव संख्या असेल आणि m व n हे पूर्णांक असतील तर $(a^m)^n = a^{m \times n}$ तसेच m, n, p हे पूर्णांक असतील आणि a ही शून्येतर वास्तव संख्या असेल तर $\left[(a^m)^n\right]^p = a^{m \times n \times p}$

उदा. 1) $[(5^{-3})^{-1}]$

$= 5^{-3 \times (-1)}$

$= 5^{3}$

3.3.5 संख्येची विविध मुळे :

m ही धन पूर्णांक संख्या असेल, a ही धन वास्तव संख्या असेल आणि b ही वास्तव संख्या अशी असेल की $b^{m} = a$ तर b ला a चे m वे मूळ म्हणतात.

b हे मूळ $\frac{1}{a^{m}}$ ह्या चिन्हाने दाखवितात.

जेव्हा $b^{m} = a$ तेव्हा $b = a^{1/m}$

तसेच $(a^{1/m})^{m} = a$ $b = (b^{m})^{1/m}$

उदा. जेव्हा $2^{3} = 8$

तेव्हा $2 = 8^{1/3}$

तसेच $(8^{1/3})^{3} = 8$

$2 = (2^{3})^{1/3}$

3:3:6 धन परिमेय घातांकाचा अर्थ :

'a' ही धन वास्तव संख्या असेल आणि m ही धन परिमेय संख्या p/q बरोबर असेल तर a च्या q या मुळाचा p वा घात $a^{p/q}$ ह्या चिन्हाने दाखविता येतो. $a^{p/q} = (a^{1/q})^{p}$

a चे q मूळ माहित असल्यास $a^{p/q}$ ची किंमत ठरविता येते.

उदा. $256^{3/8} = (256^{1/8})^{3}$

$= 2^{3}$

$= 8$

(256 चे आठवे मूळ 2 आहे.)

3:3:7 धन परिमेय घातांक :

1) 'a' ही धन वास्तव संख्या असेल आणि m व n ह्या धन परिमेय संख्या असतील तर,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

उदा. $a^{1/4} \times a^{1/4} =$

$= a^{1/4 + 1/4}$

$= a^{2/4}$

$= a^{1/2}$

2) 'a' ही धन वास्तव संख्या असेल आणि m व n हे धन अपूर्णांक असतील तर

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ---- $(m > n)$ आणि

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ ----- $(n > m)$

उदा.1) $\frac{p^{2/3}}{p^{1/3}}$

$= p^{2/3 - \frac{1}{3}}$

$= p^{\frac{2-1}{3}} = p^{1/3}$

2) $\frac{t^{4/3}}{t^{13/3}}$

$= \frac{1}{t^{13/3 - 4/3}}$

$= \frac{1}{t^{\frac{13-4}{3}}}$

$= \frac{1}{t^{9/3}} = \frac{1}{t^3}$

3) a आणि b या धन वास्तव संख्या असतील आणि m ही धन परिमेय संख्या असेल तर,

$(a \times b)^m$

$= a^m \times b^m$ आणि

$\left(\frac{a}{b}\right)^m$

$= \frac{a^m}{b^m}$

उदा.

1) $(25 \times 16)^{3/2}$

$= 25^{3/2} \times 16^{3/2}$

तसेच

$\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2}$

$= \frac{25^{3/2}}{16^{3/2}}$

4) a ही धन वास्तव संख्या असेल आणि m व n ह्या धन परिमेय संख्या असतील तर,

$(a^m)^n$

$= a^{m \times n}$

उदा. $(625^{2/4})^{7/2}$

$= 625^{2/4 \times 7/2}$

$= (625)^{7/4}$

$= (625^{1/4})^7$

$= (5)^7$

$= 5^7$

3:4 घातांकातील प्रक्रिया :

घातांक घटकातील उदाहरणे सोडविताना अनेक संकल्पना, नियम व प्रक्रियांची माहिती असणे आवश्यक ठरते. बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इत्यादी मूलभूत क्रियांचा वापर करता येणे आवश्यक असते.

घातांक घटकातील उदाहरणे सोडविण्यासाठी खालील प्रक्रिया कराव्या लागतात.

1) घातांकाचे नियम माहिती असावे लागतात.

2) उदाहरणाचे निरीक्षण करून वापरावे लागणारे योग्य ते घातांकाचे नियम निश्चित करणे.

3) व त्यानुसार नियमाचे योग्य रितीने उपयोजन करणे.

पाया असमान असणा-या घातांकित संख्यांच्या किंमती काढत असताना प्रथम प्रत्येक संख्येची किंमत काढावी व नंतर मूलभूत क्रिया कराव्यात.

उदा. $5 \times (3)^2 = 5 \times 9 = 45$

3:5 घातांकामध्ये आवश्यक असणारी कौशल्य व त्यावरील प्रक्रिया :

घातांकामध्ये आवश्यक असणारी कौशल्य व त्यावरील प्रक्रिया खाली दिल्या आहेत.

1) घातांकित संख्येचे वाचन व लेखन करण्याची क्षमता असणे आवश्यक असते.

2) घातांकातील उदाहरणे सोडविण्यासाठी घातांकांच्या योग्य नियमांचा वापर करत असताना कराव्या लागणा-या चार मुलभूत प्रक्रियांचे ज्ञान असणे आवश्यक असते. तसेच घातांकित संख्यातील विषमछेद अपूर्णांक घातांकांची बेरीज, वजाबाकी करताना ल.सा.वि. काढता येणे आवश्यक असते. वर्गमूळ काढणे, मूळ अवयव पाडणे, साधारण अवयव मांडणे, बहुपदींचा गुणाकार इत्यादी क्रियांचे ज्ञान असणे आवश्यक आहे.

3) घातांकावरील उदाहरणे सोडविताना योग्य गती, अचूकता व व्यवस्थित मांडणी करणे आवश्यक असते.

4) विद्यार्थ्यांच्यात संख्यात्मक आकडेमोड करण्याचे कौशल्य असणे आवश्यक असते.

5) विद्यार्थ्यांना उदाहरण सोडवून आलेल्या उत्तराचा पडताळा आला पाहिजे.

3:6 समारोप :

प्रस्तुत प्रकरणात घातांकाचा अर्थ, इयत्ता नववीला अभ्यासण्यासाठी असणारे घातांकाचे नियम, घातांकातील प्रक्रिया, घातांकामध्ये आवश्यक असणारी कौशल्ये व त्यावरील प्रक्रिया इत्यादी बाबींचा उहापोह केला आहे. अशा प्रकारे या प्रकरणात घातांकावरील नैदानिक कसोटीसाठी आवश्यक असणारी आधारभूत माहिती दिली आहे.

पुढील प्रकरण चार मध्ये संशोधन विषयाशी संबंधित संशोधित साहित्याचा आढावा घेतला आहे.

– – –